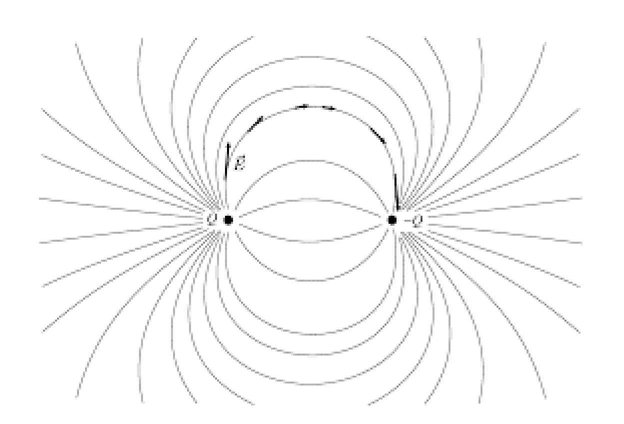
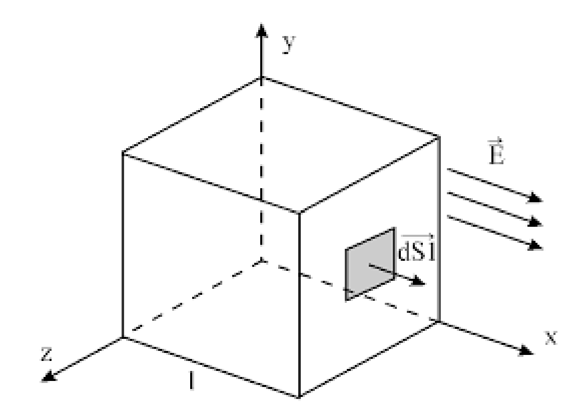


Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs El-Manar

Cours d'électrostatique

Exercices et examens corrigés





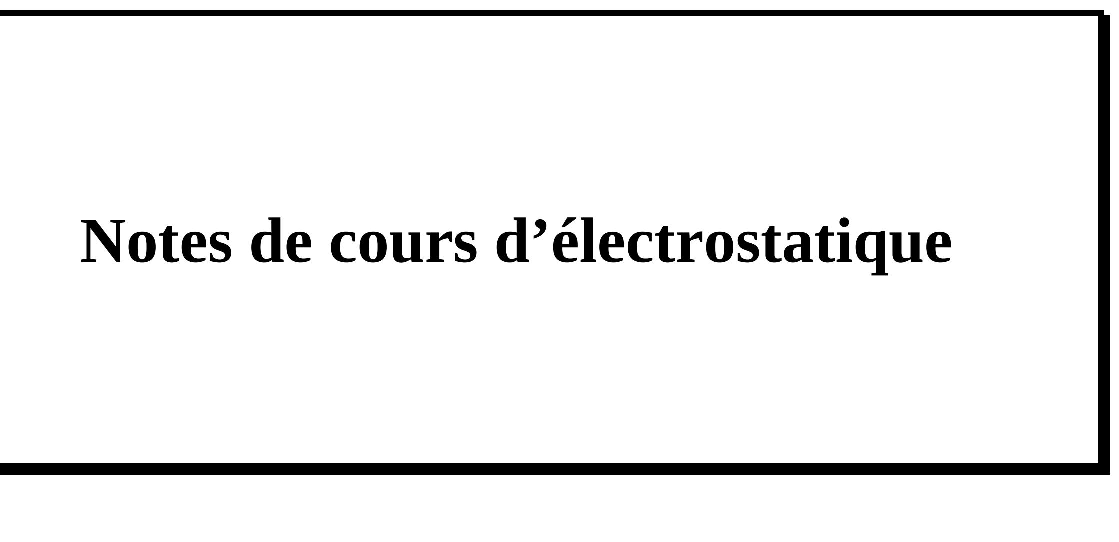
Zouhaier HAFSIA

Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs El-Manar

Saliha NOURI

Ecole Supérieure des Sciences et Technique de Tunis

Année universitaire 2015-2016



Notes de cours d’électrostatique

Chapitre I

CHARGE ET INTERACTIONS ELECTROSTATIQUES

I-1 INTRODUCTION

L'électrostatique est la branche de la physique qui étudie les phénomènes (champ et potentiel électrostatique) créés par des charges électriques statiques pour l'observateur. Les forces électrostatiques sont décrites par la loi de Coulomb qui présente une certaine analogie avec l'interaction gravitationnelle.

I-2 LA CHARGE ELECTRIQUE

I-2.1 Définition

La charge électrique d'une particule est une grandeur **scalaire** (algébrique) qui caractérise les actions électromagnétiques subies ou exercée par la particule.

La **charge** électrique joue dans l'interaction électrostatique le même rôle que joue la **masse** (scalaire positive) dans l'interaction gravitationnelle.

Les expériences d'électrisation montrent qu'il existe **deux** classes de particules chargées : deux particules chargées d'une même classe se repoussent alors que deux particules chargées appartenant à des classes différentes s'attirent. Par **convention**, l'une des classes sera dite chargée positivement, l'autre chargée négativement. Ainsi, si le proton est affecté d'une charge positive et l'électron d'une charge négative, aucune considération physique ne peut justifier ce choix qui n'a aucune incidence sur la théorie de l'électromagnétisme.

I-2.2 Quantification de la charge

A l'échelle **microscopique**, l'expérience montre (Millikan, 1913), montre que la charge électrique varie de façon **discontinue** et se présente par unité sous forme de quantité bien déterminée. On dit qu'elle est quantifiée. Sa valeur est un multiple entier d'une charge qu'on peut prendre comme **charge élémentaire**, notée e. C'est la valeur absolue de la charge de l'électron $e = 1{,}60219\ 10^{-19}$ C.

Les particules élémentaires, constituants de la matière, ont pour charges:

- électron : $q = -e = -1{,}60\ 10^{-19}$ C
- proton : $q = +e = 1{,}60\ 10^{-19}$ C
- neutron : la charge est nulle.

L'unité de la charge est le coulomb C dans le SI. (MKSA). C'est la quantité de charge transportée par un courant de 1 Ampère pendant 1 seconde ($Q = I\ t$).

$1\ C = 6{,}25\ 10^{18}\ e$

C'est un nombre élevé de particules. Dans la pratique, on utilise le mC et le μC.

Notons, qu'à l'échelle **macroscopiques** (grand nombre de charge élémentaires) la nature discontinue de la charge n'a plus de sens : la charge électrique paraît être une grandeur susceptible de variation **continue**.

I-2.3 Invariance de la charge électrique

Le principe de conservation de la charge est des principes fondamentaux de conservation qui sont à la base de la physique, tels que la conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement, du moment cinétique, ...

La charge totale d'un système n'est pas modifiée par suite du mouvement des charges. La loi de conservation de la charge est valable en relativité, c'est-à-dire même si la charge se

déplace à une vitesse proche de celle de la lumière. On dit que la charge électrique est une grandeur qui est conservée : c'est un **invariant relativiste**. Des expériences ont permis de montrer que la valeur de la charge d'un électron ne dépend pas de sa vitesse : la valeur est donc la même pour un observateur en mouvement par rapport à la charge. Ce n'est pas le cas de toutes les grandeurs physiques : l'énergie est conservée mais n'est pas un invariant relativiste.

I-3 LOI DE COULOMB OU PRINCIPE FONDAMENTAL DE L'ELECTROSTATIQUE

Nous commencerons par analyser l'interaction électrostatique (forces et champ) dans le cas de charges ponctuelles. Par charges ponctuelles nous voulons signifier que les dimensions des chargées sont petites par rapport à la distance qui les sépare ; ce n'est donc qu'une **idéalisation mathématique** d'un système physique. La généralisation de ces notions au cas d'une distribution continue de charges sera faite dans le chapitre II.

I-3.1 Enoncé de la loi de Coulomb

Considérons **dans le vide**, deux **charges ponctuelles** q_1 et q_2, **fixées** en M_1 et M_2. Les deux charges **stationnaires** q_1 et q_2 exercent l'une sur l'autre une force proportionnelle à chacune des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. La force électrostatique est dirigée suivant la droite qui joint les charges (figure I-1). Elle attractive si les charges sont de signes contraires (figure I-1-a), répulsive lorsque les charges sont de même signe (figure I-1-b).

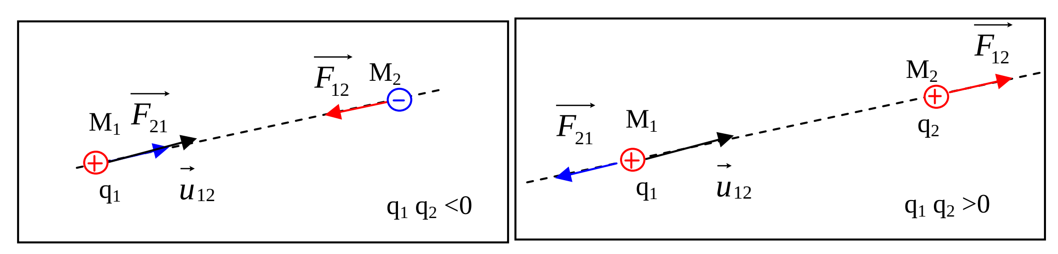


Figure I-1-a **Figure I-1-b**

La force $\vec{F}_{12}$ exercée par q_1 sur la charge q_2 s'écrit :

$$\vec{F}_{12} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_{12} \qquad \text{(I-1)}$$

où r est la distance entre q_1 et q_2 et $\vec{u}_{12}$ le vecteur unitaire défini par :

$$\vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{r}$$

Conformément au principe de l'action et de la réaction, la force $\vec{F}_{21}$ exercée par q_2 sur la charge q_1 est égale et opposée à $\vec{F}_{12}$:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Les forces $\vec{F}_{12}$ et $\vec{F}_{21}$ sont portées par la droite qui joint les charges q_1 et q_2. C'est une caractéristique que l'on peut expliquer en évoquant le principe **d'isotropie** : dans un univers vide, aucune direction ne peut être privilégiée par rapport à une autre, toutes les directions sont **équivalentes**. La présence de deux charges ponctuelles **détruit cette isotropie** en introduisant une seule direction privilégiée, la droite joignant les charges.

La constante de proportionnalité est liée aux unités choisies pour exprimer la force, la longueur et la charge. Dans le système d'unités international (S.I.), sous sa forme rationalisée, K s'écrit :

$$K = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \cong 9\,10^9\, SI\ (V\,m/C)$$

où ε_0 est la permittivité du vide et a pour valeur :

$$\varepsilon_0 = 8{,}854\,10^{-12}\ F\,m^{-1}$$

I-3.2 Validité de la loi de Coulomb

La loi de Coulomb est valable pour des charges au **repos** où à la limite en mouvement relatif **lent**. Elle est aussi valable **dans le vide** et approximativement **dans l'air**.

La loi de Coulomb reste valable pour les très grandes distances dans le domaine microscopique : jusqu'à 10^{-15} m, ordre de grandeur des dimensions du noyau atomique. Cette loi n'est **pas valable** pour des distances inférieures à 10^{-15} m (dimension du noyau atomique). Dans ce dernier cas, il sera nécessaire d'utiliser la mécanique quantique pour l'étude du comportement des particules sous l'effet des forces coulombiennes.

Dans d'autres **milieux linéaires** homogènes et isotropes (l.h.i.), l'interaction électrostatique est bien décrite par la loi de Coulomb à condition de remplacer ε_0 par une constante ε différente qui tient compte de l'influence du milieu (ses caractéristiques électriques). ε s'appelle la permittivité diélectrique du milieu et l'on pose dans ce cas $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ où ε_r est la permittivité diélectrique relative du milieu (quantité sans dimension).

I-3.3 Analogie avec l'interaction de gravitation

Deux points matériels de masse m_1 et m_2, placées respectivement en M_1 et M_2 exercent l'un sur l'autre une force de gravitation ; la force $\vec{F}_{12g}$ exercée par m_1 sur m_2 est :

$$\vec{F}_{12g} = -G\,m_1 m_2 \frac{\vec{u}_{12}}{r^2} \qquad \text{(I-2)}$$

Où G est la constante de gravitation universelle.

La force de gravitation a la même formulation mathématique que la force électrostatique : elle est portée par la droite qui joint les masses m_1 et m_2 et inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare les deux masses. Nous verrons au chapitre suivant les propriétés qui découlent de ces deux caractéristiques et qui seront donc applicables aux forces de gravitation. C'est pourquoi on appelle les forces de la forme $k\frac{\vec{u}_r}{r^2}$, forces coulombiennes. Mais elles sont **toujours attractives**.

D'après le cours de mécanique du point, la force de gravitation joue un rôle fondamental dans la mécanique des **objets macroscopiques** et dans la dynamique céleste. Cependant, à **l'échelle atomique** et subatomique, la force de gravitation est **négligeable**.

A titre d'exemple, comparons la force de gravitation qui s'exerce entre l'électron et le proton d'un atome d'hydrogène à la force électrostatique s'exerçant entre eux. La distance r qui sépare l'électron de masse $m_e = 9{,}1\ 10^{-31}$ kg du proton de masse $m_p = 1{,}7\ 10^{-27}$ kg est environ $5\ 10^{-11}$ m.

$$\left\|\vec{F}_e\right\| = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = 9\,10^9\,\frac{(1{,}6\,10^{-19})^2}{(5\,10^{-11})^2} = 9\,10^{-8}\,N$$

$$\left\|\vec{F}_g\right\| = G\frac{m_e m_p}{r^2} = 6{,}7\,10^{-11}\,\frac{(9{,}1\,10^{-31})(1{,}7\,10^{-27})}{(5\,10^{-11})^2} = 4\,10^{-47}\,N$$

La force électrostatique est 10^{39} fois supérieure à la force de gravitation. On peut alors s'étonner du fait que dans notre vie quotidienne, nous ne ressentions pas de manifestations de ces forces énormes d'origine électrique. L'existence de deux types de charges de signe contraire, mais de même valeur absolue conduit à des forces de répulsion et d'attraction et la neutralité électrique de la matière assure une compensation entre ces forces. Par contre les forces gravitationnelles bien que d'intensité faible, produisent des effets significatifs car elles sont toujours attractives. On peut imaginer ce qu'entraînerait un léger excès d'électrons sur deux personnes distantes de un mètre : si chacune d'elle porte un pour cent de plus d'électrons que de protons, elles exerceraient entre elles une force capable de soulever la terre toute entière.

I-4 PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Considérons trois charges ponctuelles q_1, q_2 et q **fixées** respectivement en P_1, P_2 et M (Figure I-2).

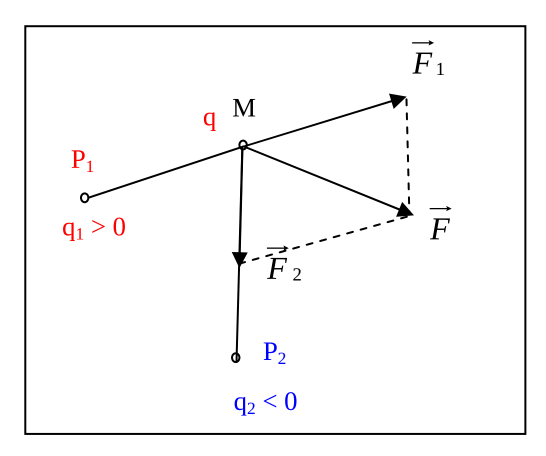


Figure I-2

Quelle est la force $\vec{F}$ que subit la charge q placée en présence des charges q_1 et q_2 ?

La loi de Coulomb permet de calculer la force $\vec{F}_1$ subie par la charge q lorsqu'elle est uniquement en présence de q_1. On peut de la même manière calculer $\vec{F}_2$, force subie par q lorsque seule q_2 est en présence de la charge q.

L'expérience montre que la force $\vec{F}$ subit par q lorsqu'elle est en présence des deux charges q_1 et q_2 est la somme vectorielle des forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{q\,q_2}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_1M}}{\left\|\overrightarrow{P_1M}\right\|^3} + \frac{q\,q_2}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_2M}}{\left\|\overrightarrow{P_2M}\right\|^3} \qquad \text{(I-3)}$$

Ce résultat est vérifié quel que soit le nombre de charges en présence. La force $\vec{F}$ subie une charge q placée en M, en présence de n chargées q_1, q_2, ..., q_i, ...,q_n fixées en P_1, P_2, ..., P_i, ..., P_n est la somme vectorielle des forces dues à l'interaction de chacune des charges avec q, calculées séparément :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = q\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_iM}}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|^3} \qquad \text{(I-4)}$$

Cette expression exprime le principe de superposition. la force totale $\vec{F}$ due à un ensemble de charges est la somme vectorielle de l'effet de chaque charge prise individuellement. Ce qui suppose que la force s'exerçant entre deux charges n'est pas modifiée par la présence d'une troisième charge. Il y a donc indépendance des effets : la

solution est simplement la somme des solutions calculées pour chaque couple de charges. Il en résulte que les équations de l'électrostatique sont des équations linéaires. Le principe de superposition s'applique aux phénomènes électromagnétiques : les équations de Maxwell, équations de base de l'électromagnétisme sont des équations linéaires.

Cependant, il ne faut pas en déduire que c'est un principe général en physique. En effet, le principe de superposition ne s'applique pas toujours ; par exemple, dans le domaine atomique ou subatomique, des effets quantiques de nature électromagnétique, non linéaires peuvent apparaître.

I-5 LE CHAMP ELECTROSTATIQUE

Considérons la force $\vec{F}$ définie par (I-4). Divisons l'expression (I-4) par la charge q. Nous obtenons une grandeur vectorielle qui dépend de la structure des n charges et de la position du point M : cette grandeur est appelée le champ électrostatique, $\vec{E}(M)$, crée au point M par le système de chargées q_1, q_2, ..., q_i, ..., q_n fixées en P_1, P_2, ..., P_i, ..., P_n.

$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}}{q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_iM}}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|^3} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} \qquad \text{(I-5)}$$

$$\vec{u}_i = \frac{\overrightarrow{P_iM}}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|} \text{ et } r_i = \left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|$$

Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ qui résulte de $\vec{F}$ est la somme vectorielle des champs $\vec{E}_i(M)$ crées par les charges q_i :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i(M) \qquad \text{(I-6)}$$

où $\vec{E}_i(M)$ est le champ crée en M par la charge q_i ponctuelle placée en P_i (Figure I-3)

$$\vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_iM}}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|^3} = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} \qquad \text{(I-7)}$$

Nous venons de définir une grandeur vectorielle, fonction du point M, caractéristique du système de charges q_1, q_2, ..., q_i, ...,q_n, sources du champ $\vec{E}$. En chaque point de l'espace, on fait correspondre un vecteur $\vec{E}$, fonction du point considéré (Figure I-3).

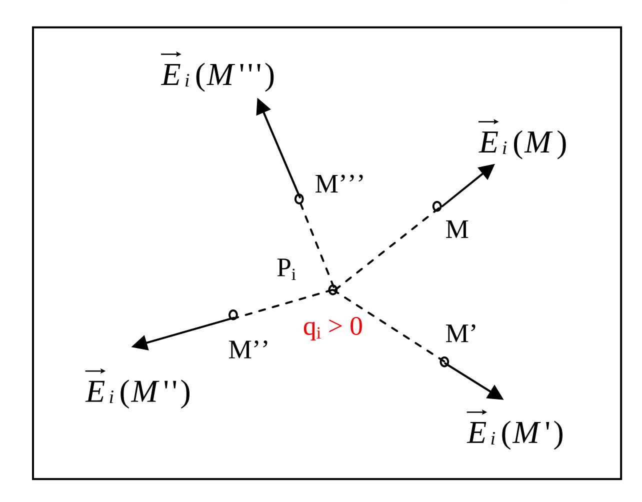


Figure I-3

L'ensemble des vecteurs $\vec{E}$ constitue un champ de vecteurs. Le champ $\vec{E}$ étant déterminé, la force $\vec{F}$ que subit une charge q placée en un point M est donnée par la relation :

$$\vec{F} = q\vec{E}(M) \qquad \text{(I-8)}$$

L'introduction du champ $\vec{E}$ aboutit à une nouvelle description de l'interaction électrostatique. Nous avons remplacée l'action à **distance** contenue dans la loi de Coulomb par la notion de champ électrostatique, grandeur locale.

Au lieu de considérer les charges q_i et q en présence interagissant par l'intermédiaire de la force de Coulomb :

Charge q_i en P_i ⟹ Charge q en M soumise à $\vec{F} = q\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_iM}}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|^3}$

On exprime le champ $\vec{E}_i$ crée par la charge q_i dans tout l'espace entourant cette charge. Ce champ existe **indépendamment du fait qu'il existe ou non une autre charge q** en présence de la charge q_i, source du champ $\vec{E}_i$. La force $\vec{F}$ subie par q placée en M résulte de l'existence en ce point d'un champ électrostatique :

Charge q_i en P_i : source du champ electrostatique ⟹ $\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_iM}}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|^3}$ ⟹ Agit sur la charge q : $\vec{F} = q\vec{E}$

I-6 CONCLUSION

Le champ électrostatique crée en un point M par une charge ponctuelle q placée en O est :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^3} = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

où : $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$ et $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$

Le champ $\vec{E}(M)$ présente deux caractéristiques :

- La première réside dans le fait que $\vec{E}(M)$ est de la **forme** $f(r)\vec{u}_r$, propriété que nous exploiterons dans le calcul de la circulation de $\vec{E}$ et qui conduira à la définition du potentiel électrostatique.
- La deuxième caractéristique est la **forme de f(r)**, en $\frac{1}{r^2}$, propriété que nous exploiterons dans le calcul du flux de $\vec{E}$ et qui conduira au théorème de Gauss. Les résultats que nous obtiendrons seront valables pour tout champ de la forme $f(r)\vec{u}_r = \frac{\vec{u}_r}{r^2}$, en particulier le champ de gravitation.

Chapitre II

CHAMP ET POTENTIEL ELECTROSTATIQUES

II-1 INTRODUCTION

Le **potentiel** électrostatique V(M) associé au champ **électrostatique** $\vec{E}(M)$ est une fonction **scalaire** contrairement à $\vec{E}$. Nous verrons, dans beaucoup de cas, que le potentiel sera un intermédiaire commode dans le calcul du champ **vectoriel** $\vec{E}(M)$. Le potentiel se rattache physiquement à la notion d'énergie potentielle, d'où son appellation.

II-2 CIRCULATION DU CHAMP ELECTROSTATIQUE : LE POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

II-2.1 Potentiel électrostatique

a) Cas d'une seule charge ponctuelle

Considérons une charge ponctuelle q (>0) fixée en P et un point M de l'espace (figure II-1) :

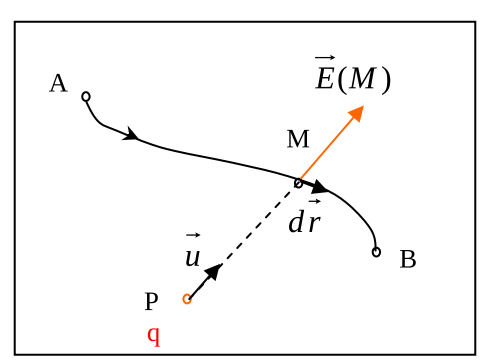


Figure II-1

La charge ponctuelle q fixée en P crée en tout point M de l'espace un champ électrostatique donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{r^2}$$

avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}$: vecteur unitaire dirigé de P vers M.

La circulation élémentaire dC du champ $\vec{E}$ correspondant à un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ du point M sur la courbe AB est :

$$dC = \vec{E}.d\vec{r} = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{u}.d\vec{r} \qquad \text{(II-1)}$$

Or, $d\vec{r} = d(\overrightarrow{PM}) = d(r\vec{u}) = dr\,\vec{u} + r\,d\vec{u}$ et $d\vec{r}.\vec{u} = (dr\,\vec{u} + r\,d\vec{u}).\vec{u} = dr + rd\vec{u}.\vec{u}$

Puisque : $d(\vec{u}.\vec{u}) = 2\vec{u}.d\vec{u} = 0$; on a : $d\vec{r}.\vec{u} = dr$

La circulation élémentaire dC s'écrit alors :

$$dC = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right) \qquad \text{(II-2)}$$

Posons alors,

$$dC = \vec{E}.d\vec{r} = -dV(r)$$

V est le potentiel électrostatique V(M) crée par la charge q fixée en M :

$$V(M) = V(r) = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + cste \qquad \text{(II-3)}$$

Nous venons de définir un nouveau champ, le **potentiel électrostatique** ; c'est un champ **scalaire** défini à une constante près. On **choisit** en général la valeur de la constante de telle sorte que le potentiel soit nul lorsque le point M est infiniment éloigné de la charge : $V(r \to \infty) = 0$. Dans ce cas, la constante est nulle et le potentiel s'écrit :

$$\boxed{V(M) = V(r) = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}} \qquad \text{(II-4)}$$

Comme le champ $\vec{E}$, le potentiel V **n'est pas défini** aux points P_i : $\vec{E}(P_i)$ et $V(P_i)$ ne sont pas définis.

b) Cas d'une distribution de n charges ponctuelles

Soient n charges ponctuelles q_1, q_2, ..., q_i, ...,q_n fixés aux points P_1, P_2, ..., P_i, ...,P_n. Soit M un point de l'espace. (figure II-2).

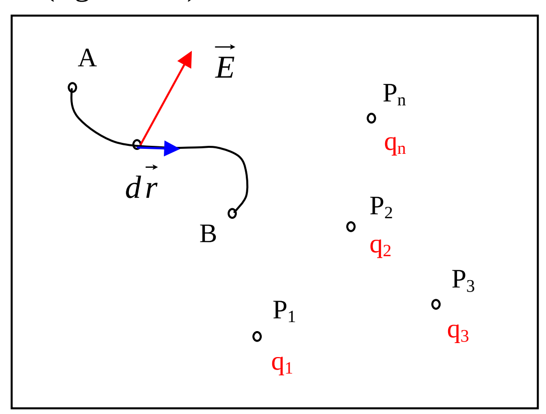


Figure II-2

Calculons la circulation élémentaire dC_i du champ $\vec{E}_i$ crée par **la charge** q_i seule :

$$dC_i = \vec{E}_i.d\vec{r} = -dV_i(r)$$

Avec $\vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_iM}}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|^3} = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_i}{r_i^2}$ et $\overrightarrow{P_iM} = r_i\vec{u}_i$

Ainsi, le potentiel électrostatique $V_i(M)$ dû à la charge q_i.

$$V_i(M) = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_i}$$

avec: $r_i = \left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|$

Le potentiel V(M) dû à l'ensemble des n charges est la somme des potentiels en application du **principe de superposition** :

$$V(M)=\sum_{i=1}^{n}V_i(M)=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_i} \qquad \text{(II-5)}$$

Dans cette relation, nous avons **choisi** la constante nulle pour **chaque** potentiel V_i crée par la charge q_i ; ceci n'est pas valable que si les charges q_i sont réparties dans un **volume fini.**

II-2.2 Relation entre champ et potentiel électrostatique

Le potentiel électrostatique a été défini à partir de la circulation élémentaire du champ $\vec{E}$:

$$dC=\vec{E}.d\vec{r}=-dV$$

Or,

$$dV=\overrightarrow{grad}V.d\vec{r}$$

d'où la relation entre $\vec{E}$ et V :

$$\vec{E}(M)=-\overrightarrow{grad}V(M) \quad \text{: relation locale} \qquad \text{(II-6)}$$

Le **champ** électrostatique $\vec{E}$ **dérive** du potentiel scalaire V. Par l'intermédiaire de cette relation locale, qui lie le champ électrostatique $\vec{E}$ et le potentiel électrostatique V, la connaissance de V en un point de l'espace **suffit** pour la détermination de $\vec{E}(M)$. Cette relation implique des conditions de **continuité** et de **dérivabilité** sur la fonction V(M).

Unité : l'unité du **potentiel électrostatique** dans le système MKSA est le **Volt** (V). D'après la relation qui lie le **champ électrostatique** $\vec{E}$ et le potentiel électrostatique V, l'unité du champ électrostatique est le **Volt par mètre** (V/m).

II-2.3 Propriétés

La circulation C_{AB} du champ $\vec{E}$ le long du contour AB est

$$C_{AB}=\int_A^B\vec{E}.d\vec{r}=-\int_A^B dV=V(A)-V(B)=\frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right) \qquad \text{(II-7)}$$

La circulation du champ de vecteur $\vec{E}$, le long de AB, est donc égale à la **différence** de potentiel $V_A - V_B$. Ainsi, la connaissance de $\vec{E}$ ne définit que les **différences** de potentiel. Pour avoir le potentiel en un point, il faudra définir une origine arbitraire des potentiels. Il est commode de choisir le potentiel nul à **l'infini** quand la distribution de charges est limitée à un **domaine fini**.

La circulation du champ de vecteur $\vec{E}$, le long de AB est indépendante de la forme du contour AB ; elle **ne dépend pas** du chemin suivi (la circulation élémentaire dC est différentielle totale exacte).

En conséquence la circulation de $\vec{E}$ est **nulle** le long de tout contour **fermé**. Le champ $\vec{E}$ est un champ de vecteurs à **circulation conservative** qui dérive d'une fonction scalaire appelée potentiel électrostatique.

En résumé :

$$C_{AB}=\int_{AB}\vec{E}.d\vec{r}=-\int_A^B dV=V(A)-V(B)\Leftrightarrow\oint\vec{E}.d\vec{r}=0\Leftrightarrow\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V \qquad \text{(II-8)}$$

II-2.4 Topographie d'un champ électrique

a) Lignes de champ

Pour avoir une idée sur l'allure du champ $\vec{E}$, on trace les **lignes de champ**, c'est à dire les courbes tangentes en chaque point au vecteur $\vec{E}$ défini en ce point. Ces courbes sont orientées par **convention** dans le sens du vecteur $\vec{E}$ (figure II-3).

Soit M un point d'une ligne de champ et $d\vec{r}$ le vecteur déplacement élémentaire sur une ligne de champ (Figure II-3). Puisque $\vec{E}$ et $d\vec{r}$ sont colinéaires, on a :

$$d\vec{r} \wedge \vec{E} = \vec{0} \qquad \text{(II-9)}$$

Cette relation permet d'obtenir les équations des lignes de champ. Dans le système de coordonnées **cartésiennes**, posons : $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$ et $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

La relation (II-9) conduit à :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \qquad \text{(II-10)}$$

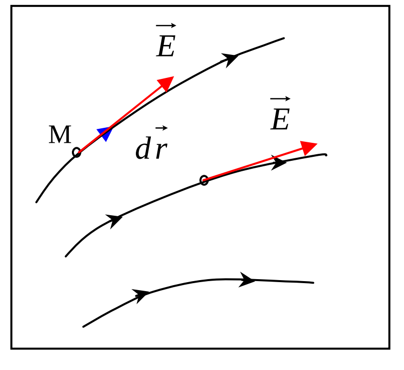


Figure II-3

Exemple de lignes de champ

Soit une charge ponctuelle en O. les lignes du champ crée par la charge ponctuelle sont des demi-droites concourantes en O, divergentes si q > 0 (figure II-4-a) et convergentes si q < 0 (figure II-4-b).

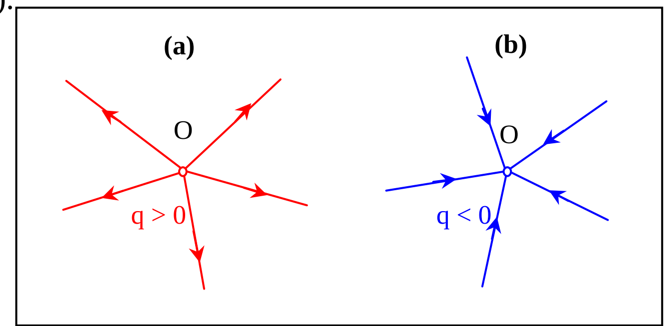


Figure II-4

- Notons que dans une région où le champ $\vec{E}$ est un vecteur bien défini et non nul, on peut suivre de façon continue une ligne de champ
- Deux lignes de champ ne peuvent se croiser : la figure II-4 montre que les lignes de champ commencent (figure II-4-a) ou s'arrêtent (figure II-4-b) sur les charges qui sont des points singuliers.

b) Tube de champ

L'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé constitue un tube de champ (Figure II-5).

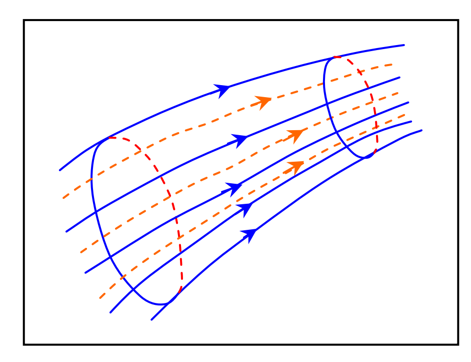


Figure II-5

c) Surface équipotentielles

Ce sont des surfaces d'équation V = cste, c'est à dire d'égal potentiel (Figure II-6).

D'après la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$, le champ $\vec{E}$ est **normal** aux surfaces équipotentielles et dirigé vers les potentiels **décroissants** (sans le signe moins dans cette relation, $\vec{E}$ est dirigé vers les potentiels croissants).

Nous avons représenté sur la figure II-6 les surfaces équipotentielles et les lignes du champ $\vec{E}$ crée par une charge ponctuelle positive. Les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées en O, point où se trouve la charge. La direction de $\vec{E}$, c'est à dire du gradient de V est la direction de la normale aux surfaces équipotentielles, celle où V varie le plus **rapidement** ; il est clair que pour passer de la valeur V_1 à la valeur V_2, le chemin le plus **court** est le segment AB.

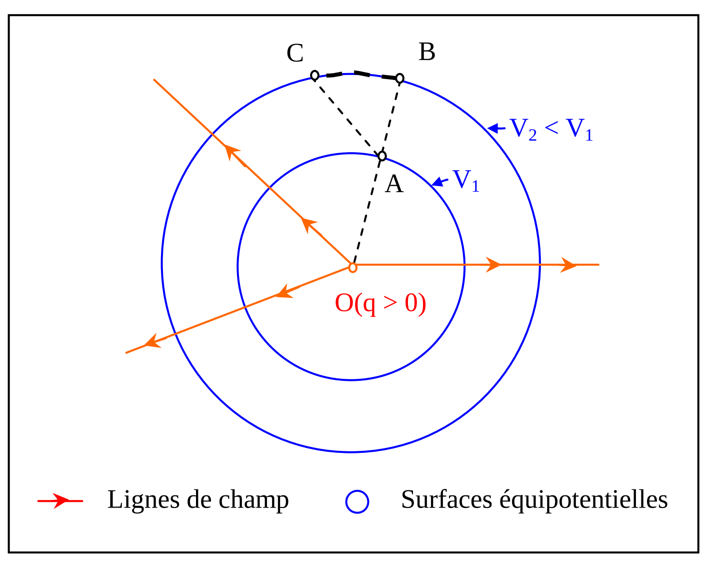


Figure II-6

Remarque

Lorsqu'on a un système de plusieurs charges, on **ne peut pas** obtenir les lignes de champ **par superposition** des lignes du champ de chacune des charges. Il faut calculer le **champ total** $\vec{E}$ et **ensuite tracer les lignes de champ**.

II-2.5 Signification physique du potentiel électrostatique

Concéderons une charge q en M soumise à un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ due à une certaine distribution de charges discontinue (figure II-7).

La force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$ entraîne un déplacement de la charge q (placée en M) d'un point M_1 à un point M_2.

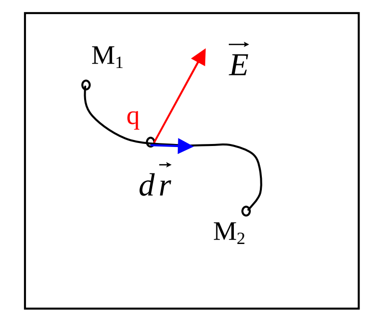


Figure II-7

La force électrostatique est conservative. Elle dérive donc d'une énergie potentielle U telle que :

$$dU = -dW(\vec{F}) = -\vec{F}.d\vec{r}$$

Posons : $\vec{F}_{op} = -\vec{F}$

Nous avons introduit la force $\vec{F}_{op}$ pour avoir un moyen d'amener la charge q du point M_1 au point M_2, qui n'entraîne **pas de production d'énergie cinétique**. L'opérateur déplace très **lentement** la charge q avec une force telle qu'elle **équilibre** la force électrostatique qui s'applique à la charge : $\vec{F}_{op} = -\vec{F}$. Ainsi, un tel déplacement appelé **quasi-statique** n'entraîne aucune production d'énergie cinétique. Dans une telle situation, le travail produit en amenant la charge de M_1 à M_2 se présente sous forme **d'énergie potentielle**.

Ainsi, dU représente le travail qu'un opérateur doit appliquer à la charge q **contre** la force électrostatique $\vec{F}$ pour déplacer la charge q de dr.

$$dU = \vec{F}_{op}.d\vec{r} = -q\vec{E}.d\vec{r} = dW_{op} \qquad \text{(II-11)}$$

Pour amener la charge du point M_1 au point M_2, on a :

$$\Delta U = q\int_{M_1M_2} (-\vec{E}).d\vec{r} = q\int_{M_1}^{M_2} dV = q(V(M_2) - V(M_1)) = U(M_2) - U(M_1)$$

Le travail de la force $\vec{F}_{op}$ **ne dépend pas du chemin suivi**, il ne dépend que de la position initiale M_1 et de la position finale M_2. Il s'ensuit que le travail de $\vec{F}_{op}$ lorsque la charge q est déplacée le long d'un contour **fermé** est **nul**, résultat que nous avons obtenu pour la circulation de $\vec{E}$.

$W_{1\to 1}^{op} = -q\oint \vec{E}.d\vec{r} = 0$ $\Leftrightarrow$ conservation de l'énergie $\Leftrightarrow$ le champ $\vec{E}$ est conservatif.

Exprimons le travail $W_{\infty\to M}^{op}$ que l'opérateur doit fournir pour amener la charge q de l'infini au point M. Sachant que $V(\infty) = 0$:

$$W_{\infty\to M}^{op} = -\int_{\infty}^{M} q\vec{E}.d\vec{r} = qV(M) - qV(\infty) = U(M) \qquad \text{(II-12)}$$

U(M) est l'énergie potentielle de la charge q placée au point M où le potentiel est V(M), d'où le nom potentiel et la justification du choix du signe moins dans la relation de définition : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$.

$U(M) = qV(M)$: énergie potentielle de la charge q placée en un point M où le potentiel est égal à V(M).

L'énergie potentielle est définie à une **constante près**. Il en est de même pour le **potentiel**. Il faut donc un point de référence. Expérimentalement, seules les différences de potentiel sont accessibles.

II-3 DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES - DENSITE

A l'échelle **macroscopique**, le nombre de **charges élémentaires** est **si important** que la nature **discontinue** de la charge n'a plus de sens; il en est de même pour la **masse** puisqu'il ne nous est **pas possible de déceler** les protons et les électrons à l'échelle macroscopique. Ceci nous permet de considérer que la répartition de charges dans la matière est **continue**.

II-3.1 Densité linéique de charge

Si la charge est concentrée sur un système filiforme, on définit une densité linéique de charges λ(P), à partir de la charge dq porté par un élément dl du fil, entourant le point P :

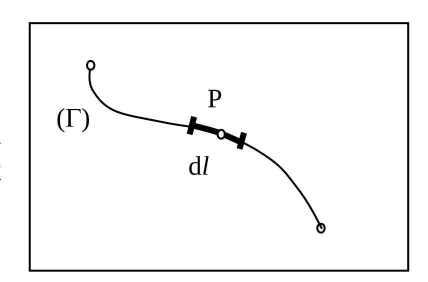


Figure II-8

$dq = \lambda \, dl$	(II-13)

La charge totale du fil est donnée par l'intégrale curviligne :

$$Q = \int_{\Gamma} \lambda dl$$

II-3.2 Densité surfacique de charge

Lorsque les charges sont réparties sur une couche d'épaisseur très faible par rapport aux dimensions de la couche, on définit une densité surfacique de charges σ(P) à partir de la charge dq portée par un élément dS de la surface de la couche, entourant le point P :

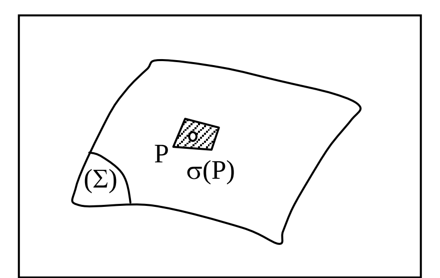


Figure II-9

$dq = \sigma \, dS$	(II-14)

Dans ce cas, la charge totale d'une surface (S) est donnée par s'obtient à partir de l'intégrale de surface :

$$Q = \iint_{S} \sigma dS$$

II-3.3 Densité volumique de charge

Pour décrire une distribution volumique de charge, on définit la densité volumique de charges ρ(P) à partir de la charge dq contenue dans un élément de volume dτ entourant le point P :

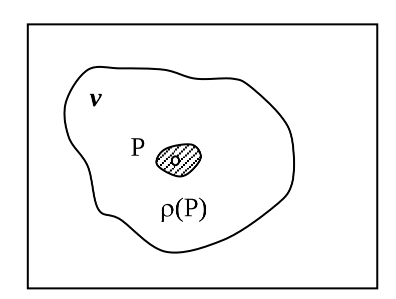


Figure II-10

$dq = \rho \, d\tau$	(II-15)

La densité de charges ρ(P) est une fonction de point **scalaire** qui peut subir de **grandes variations d'un point à l'autre** de la distribution. En effet, la charge est nulle dans l'espace vide entre un noyau et un électron et prend une valeur différente de zéro en un point situé sur le noyau ou l'électron. En conséquence ρ(P) pourrait avoir des valeurs très différentes suivant le choix du volume élémentaire dτ. Pour que la définition de ρ(P) ait un sens, c'est à dire qu'elle soit indépendante de la forme exacte de dτ, il faut considérer un élément de volume dτ qui soit **grand par rapport aux dimensions atomiques, mais très petit par rapport aux dimensions de la distribution de charges**. Celle-ci correspond alors à un système macroscopique et ρ(P) pourra être considéré comme une densité volumique de charges, moyennée sur le volume dτ. Cette description est valable tant que l'on s'intéresse à une **description macroscopique** (en opposition à microscopique) du système de charges.

Pour un volume τ, la charge totale s'obtient à partir de l'intégrale de volume :

$$Q = \iiint_{\tau} \rho d\tau$$

II-4 CHAMP ET POTENTIEL D'UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES

II-4.1 Introduction

Nous savons déterminer le champ et le potentiel électrostatique crée par une distribution de charges **ponctuelles** :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} \quad \text{et} \quad V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_i}$$

analogue à l'intégration numérique

Comment calculer le champ et le potentiel crées par une distribution continue ? La distribution de charges peut être découpée en éléments de volume ou de surface ou de courbe qui portent une **charge élémentaire** dq. Chacune de ces charges élémentaires crée un champ et un **potentiel électrostatiques appelés élémentaires**. Le champ (ou le potentiel) crée par toute la distribution est, par application du **principe de superposition**, la **somme** des charges (ou des potentiels) élémentaires crées par les charges dq.

II-4.2 Distribution linéique

On considère une portion de courbe Γ = AB portant une densité linéique de charge λ (figure II-8).

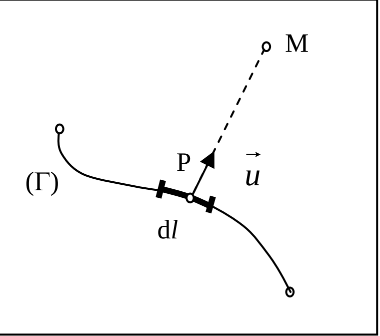


Figure II-8

Un élément dl entourant un point P porte une charge :

$dq = \lambda\, dl$

Cette charge crée en M un champ et un potentiel donné par les expressions suivantes :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\lambda(P)dl}{r^2} \vec{u} \quad \text{et} \quad dV(M) = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\lambda(P)dl}{r}$$

avec, $\overrightarrow{PM} = \left\|\overrightarrow{PM}\right\| \vec{u} = r\,\vec{u}$

D'où le champ total $\vec{E}(M)$ et le potentiel V(M) créés en M par toute la distribution linéique de charge s'écrivent :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \int_\Gamma \frac{\lambda(P)\,dl}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \int_\Gamma \frac{\lambda(P)\,dl}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} \overrightarrow{PM} \qquad \text{(II-16)}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \int_\Gamma \frac{\lambda(P)\,dl}{r} = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \int_\Gamma \frac{\lambda(P)\,dl}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|} \qquad \text{(II-17)}$$

Cette dernière relation n'est valable que si le fil est de dimension **finie**.

Remarque

On peut montrer que le champ $\vec{E}(M)$ et le potentiel V(M) **ne sont pas définis** en un point M situé sur le fil chargé.

II-4.3 Distribution surfacique

Dans le cas d'une distribution surfacique de charges, on considère une charge dq portée par un élément de surface dS (figure II-9).

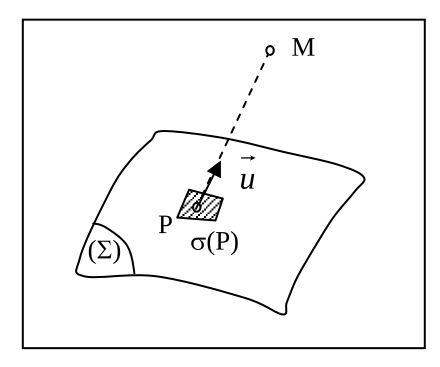


Figure II-9

Le champ et le potentiel crées en M par dq sont donnés par :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(P)dS_P}{r^2}\vec{u} \quad \text{et} \quad dV(M) = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(P)dS_P}{r}$$

avec, $\overrightarrow{PM} = \left\|\overrightarrow{PM}\right\|\vec{u} = r\,\vec{u}$

D'où le champ total $\vec{E}(M)$ et le potentiel V(M) créés par les charges réparties sur la surface Σ :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\iint_\Sigma \frac{\sigma(P)\,dS_P}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\iint_\Sigma \frac{\sigma(P)\,dS_P}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\overrightarrow{PM} \qquad \text{(II-18)}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\iint_\Sigma \frac{\sigma(P)\,dS_P}{r} = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\iint_\Sigma \frac{\sigma(P)\,dS_P}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|} \qquad \text{(II-19)}$$

Cette relation suppose que la distribution de charges s'étend sur une surface de dimension fini. Dans le cas contraire, on choisira comme origine des potentiels un point à distance finie.

Remarque

On peut montrer que le **potentiel est défini** sur la surface chargée et continue à la traversée de **la surface chargée**. Il n'en est pas de même pour le **champ** $\vec{E}$ qui n'est pas défini sur une surface chargée. Il subit une **discontinuité** à la traversée de la face chargée. Nous étudierons le comportement du champ $\vec{E}$ à la traversée d'une surface chargée au chapitre III.

II-4.4 Distribution volumique

Soit une distribution volumique de charges contenue dans le volume v ; ρ(P) est la densité volumique de charges en un point P du volume v (figure II-10).

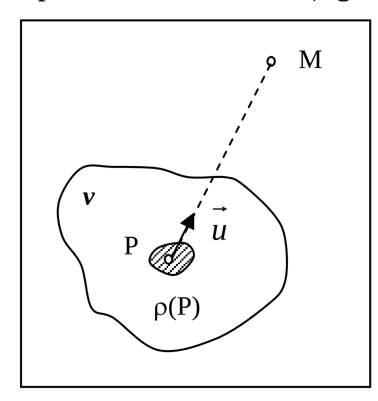


Figure II-10

La charge contenue dans l'élément de volume entourant le point P $d\tau_P$ est :
$dq = \rho(P) d\tau_P$

Cette charge crée en M un champ $d\vec{E}$ et un potentiel dV comme le ferait une charge ponctuelle dq placée en P (Figure II-1) :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u} \quad \text{et} \quad dV(M) = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

avec, $\overrightarrow{PM} = \left\|\overrightarrow{PM}\right\|\vec{u} = r\,\vec{u}$ et $dq = \rho(P) d\tau_P$

D'après le principe de superposition, le champ total $\vec{E}(M)$ créé par la distribution est la somme des contributions $d\vec{E}(M)$:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\iiint_v \frac{\rho(P)\,d\tau_P}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\iiint_v \frac{\rho(P)\,d\tau_P}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\overrightarrow{PM} \qquad \text{(II-20)}$$

Il faut donc calculer une intégrale de volume pour obtenir le champ $\vec{E}(M)$ alors que le potentiel est obtenu à partir de l'intégrale de volume :

$$V(M) = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\iiint_v \frac{\rho(P)\,d\tau_P}{r} = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\iiint_v \frac{\rho(P)\,d\tau_P}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|} \qquad \text{(II-21)}$$

Cette relation suppose que l'on a choisi le potentiel nul à l'infini, donc que la distribution de charges s'étend sur un volume fini. Si ce n'est pas le cas, il faut choisir une autre origine des potentiels.

Remarque

On peut montrer que le **potentiel** V et le **champ** $\vec{E}$ **sont définis** en un point M intérieur à la distribution de charges.

II-5 Conclusion

Le champ électrostatique peut être caractérisé simplement à l'aide d'une fonction que nous appellerons potentiel électrostatique. Cette fonction scalaire est souvent plus simple à déterminer que le champ électrostatique. Cette appellation sera justifiée par l'interprétation de cette fonction en terme d'énergie potentielle d'une charge soumise aux effets d'un champ électrostatique.

Chapitre III

THEOREME DE GAUSS

III-1 INTRODUCTION

Dans le calcul de la circulation du champ électrostatique $\vec{E}$, nous avons utilisé le fait que $\vec{E}$ est de la forme $f(r)\vec{u}_r$ et nous avons en déduit la relation entre le champ $\vec{E}$ et le potentiel V. Nous allons maintenant déduire une équation du champ $\vec{E}$ qui dépend spécifiquement du fait que f(r) est en $1/r^2$. Les développements qui suivent s'appliquent donc aux champ de la forme $\vec{u}_r / r^2$.

III-2 FLUX DU CHAMP ELECTROSTATIQUE

III-2-1 Cas d'une charge ponctuelle

a) Flux élémentaire

Soit une charge ponctuelle q>0 placée en O et M un point de l'espace (figure III-1).

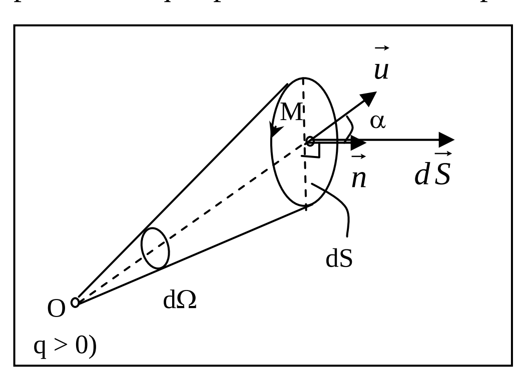


Figure III-1

Le champ $\vec{E}(M)$ créé par q en M est :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{r^2}$$

avec, $\vec{u} = \overrightarrow{OM} / \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ et $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$

Soit dS un élément de surface entourant le point M ; orientons la surface dS (figure III-1). Le flux élémentaire de $\vec{E}$ à travers la surface orientée est :

$$d\Phi = \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}.d\vec{S}}{r^2} = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}d\Omega \qquad \text{(III-1)}$$

où, $d\Omega = \frac{\vec{u}.d\vec{S}}{r^2} = \frac{\vec{u}.\vec{n}}{r^2}dS$: angle solide élémentaire sous lequel du point O on voit la surface élémentaire. Le signe de dΩ dépend de l'orientation de la surface :

- dΩ > 0 si $\alpha = (\vec{u},\vec{n}) < \Pi/2$
- dΩ < 0 si $\alpha > \Pi / 2$

b) Flux sortant à travers une surface fermée

Soit une surface fermée Σ. On se propose de calculer le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle q à travers la surface fermée Σ. Plus précisément on s'intéresse au **flux sortant**, donc on a choisi d'orienter le vecteur $\vec{n}$ dans **le sens de la normale sortante** à Σ. Deux cas seront envisagés :

- le cas où la charge q est située à l'extérieure de la surface Σ
- et celui où la charge q est située à l'intérieur de la surface Σ

Nous désignons par l'indice i les charges situées à l'intérieur de Σ et par l'indice e les charges extérieures à Σ. Soit $\vec{E}_i$ le champ créé par q_i et $\vec{E}_e$ le champ créé par q_e.

1èr Cas : La charge est située à l'extérieur de Σ

Nous pouvons calculer le flux sortant de la surface fermée Σ (figure III-2) à partir des flux élémentaires. En effet, traçons un cône élémentaire de sommet O (où se trouve la charge extérieur à Σ, q_e) et d'angle solide $|d\Omega|$. Ce cône découpe sur la surface Σ deux surfaces élémentaires dS_1 en M_1 et dS'_1 et M'_1. Soient $\vec{n}_1$ et $\vec{n}'_1$ les vecteurs sortant des surfaces dS_1 et dS'_1. L'angle solide sous lequel du point O on voit les surfaces élémentaires orientées dS_1 et dS'_1, a la même valeur absolue, mais de signes opposés à cause de l'orientation du vecteur normal $\vec{n}$ par rapport à $\vec{u}$ (figure III-2) :

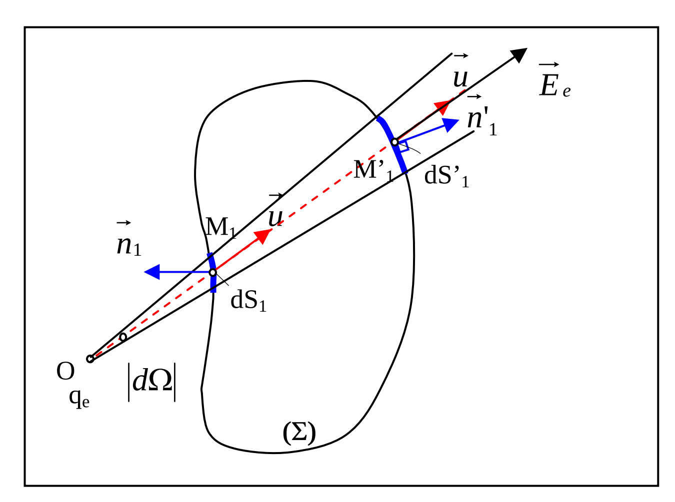


Figure III-2

$$d\Omega_1 = \frac{\vec{u}.\vec{n}_1}{r_1^2} dS_1 = -d\Omega'_1 = \frac{\vec{u}.\vec{n}'_1}{r'^2_1} dS'_1 \qquad \text{(III-2)}$$

Si on considère le flux du champ $\vec{E}_e$ créé par la charge q_e située en O, sortant des surfaces dS_1 et dS'_1, d'après (III-1) et (III-2), on obtient :

$$d\Phi_1 + d\Phi'_1 = \frac{q_e}{4\Pi\varepsilon_0} d\Omega_1 + \frac{q_e}{4\Pi\varepsilon_0} d\Omega'_1 = 0$$

Pour obtenir le flux de $\vec{E}_e$ sortant de la surface Σ, $\Phi_e = \oiint_\Sigma \vec{E}_e.d\vec{S}$, on peut balayer toute la surface Σ à l'aide de cônes élémentaires tels que celui de la figure III-2. Chacun de

ces cônes intercepte sur la surface Σ une paire de surfaces élémentaires dS_1 et dS'_1 telles que leur contribution au flux total, $d\Phi_1 + d\Phi'_1 = 0$.

On en conclut que le flux du champ électrostatique crée par une charge ponctuelle située à l'extérieur d'une surface fermée Σ, sortant de la surface Σ est nul :

$$\Phi_e = \oiint_\Sigma \vec{E}_e . d\vec{S} = 0 \qquad \text{(III-3)}$$

2ème Cas : La charge est située à l'intérieur de Σ

Soit (C) le cône élémentaire de sommet O et d'angle solide $d\Omega_1$ (figure III-3).

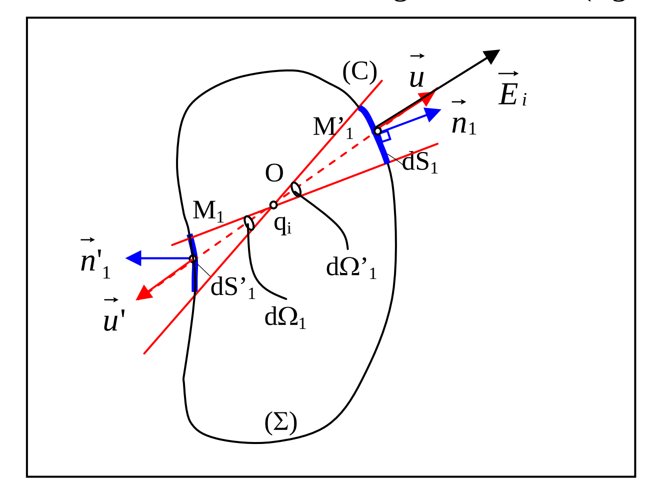


Figure III-3

Dans ce cas, l'angle solide sous lequel du point O on voit dS_1 est égal à l'angle solide sous lequel de O on voit dS'_1 :

$$d\Omega_1 = d\Omega'_1$$

d'où

$$d\Phi_1 = d\Phi'_1 = d\Phi_i$$

. Ainsi, la paire de surface élémentaire dS_1 et dS'_1 découpées par un cône élémentaire de sommet O (ou se trouve la charge q_i) donne une contribution $d\Phi_1 + d\Phi'_1$ au flux total, non nulle.

Le flux élémentaire $d\Phi_i$ crée par $\vec{E}_i$ à travers une surface élémentaire dS_i (figure III-4) est donnée par :

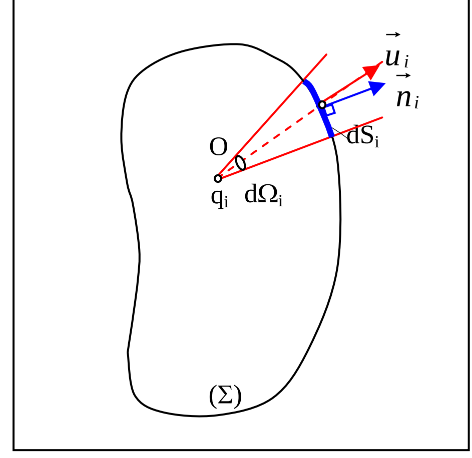


Figure III-4

$$d\Phi_i = \vec{E}_i . d\vec{S}_i = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0} d\Omega_i$$

Le flux total sortant de Σ est la somme des flux élémentaires $d\Phi_i$:

$$\Phi_i = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0} \oiint_\Sigma d\Omega_i$$

$\oiint_{\Sigma} d\Omega_i$ est l'angle solide sous lequel du point O, on voit la surface fermée Σ ; Ω_i est donc l'angle solide sous lequel du point O on voit tout l'espace :

$$\Omega_i = 4\Pi$$

d'où :

$$\Phi_i = \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

Le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle située à l'intérieur d'une surface fermée Σ, sortant de la surface Σ est égal à :

$$\Phi_i = \oiint_{\Sigma} \vec{E}_i.d\vec{S} = \frac{q_i}{\varepsilon_0} \qquad \text{(III-4)}$$

Ainsi, le flux total du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle est :

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_i = \Phi_i = \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

Cette relation relie le flux à travers une surface fermée (Σ) et les échanges à l'intérieure de cette surface.

III-2-2 Cas de n charges ponctuelles

Considérons n_i charges à l'intérieure d'une surface fermée (Σ) et n_e charges situées à l'extérieure de cette surface. Le champ $\vec{E}$ créé par les n charges ($n = n_i + n_e$) est la somme vectorielle des champs créées par chacune des charges :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n_i} \vec{E}_i + \sum_{e=1}^{n_e} \vec{E}_e$$

Le flux du champ $\vec{E}$ sortant de la surface Σ est :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}.d\vec{S} = \oiint_{\Sigma} \left(\sum_i \vec{E}_i + \sum_e \vec{E}_e \right).d\vec{S} = \sum_i \Phi_i + \sum_e \Phi_e$$

D'après (III-3) et (III-4), on a :

$$\Phi_i = \frac{q_i}{\varepsilon_0} \text{ et } \Phi_e = 0$$

d'où :

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \text{avec , } Q_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{n_i} q_i$$

Le flux sortant de la surface **fermée** Σ est égal à la somme, divisée par ε_0, des charges intérieures à la surface Σ :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(III-5)}$$

avec, Q_{int} : charge totale intérieure à Σ

Ce résultat constitue le théorème de Gauss.

III-2-3 Cas d'une distribution continue de charge

On peut écrire le théorème de Gauss dans le cas où la distribution de charges est continue et décrite par une densité volumique de charges ρ. La charge totale intérieure à Σ, c'est à dire contenue dans le volume v limité par la surface fermée Σ est :

$$Q_{\text{int}} = \iiint_v \rho \, d\tau$$

Où *v* est le volume délimitée par (Σ).

Dans ce cas le théorème de Gauss s'écrit, v étant le volume limité par la surface (Σ) :
$\Phi = \oiint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_v \rho \, d\tau$ (III-6)
C'est l'expression du théorème de Gauss sous la forme intégrale.

III-2-4 Validité du théorème de Gauss

Précisons que ce théorème est obtenu à partir de la loi de Coulomb (loi fondamentale de l'électrostatique). Ce théorème reste **valable** quand **les charges sont en mouvement**.
Le théorème de Gauss est une conséquence :

1) de la loi en $1/r^2$ régissant les interactions entre les charges électriques
2) du caractère central des forces électrostatiques
3) du principe de superposition

Nous présentons dans le tableau ci-dessous la formulation du théorème de Gauss pour le champ électrostatique.

Sources du champ	Charges
Champ créé en M par une source ponctuelle placée en P_i	$\vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_iM}}{\left\Vert \overrightarrow{P_iM} \right\Vert^3}$
Flux élémentaire	$d\Phi_i = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0} d\Omega_i$
Théorème de Gauss	$\Phi = \oiint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$ ou $\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_v \rho \, d\tau$

Cependant, ce théorème est également valable pour tous les champs de vecteurs de la forme $\vec{u}_r / r^2$, en particulier pour le champ de gravitation $\vec{g}$.

IIL-3 SYMETRIE ET INVARIANCE DE LA DISTRIBUTION DE CHARGE ET CARACTERISATION DU CHAMP ET DU POTENTIEL

On rappelle que le calcul du champ électrostatique $\vec{E}$, crée par une distribution de charge de densité volumique ρ peut être mené, soit à partir :

- de la loi de Coulomb :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \int_\tau \frac{\rho d\tau}{r^2} \vec{u}_r$$

- du potentiel V :

$$V = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho d\tau}{r}$$

avec, $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ ou $\oint_C \vec{E}.d\vec{r} = 0$

où τ est le volume de la distribution de charge, et C est un contour fermé.

- du théorème de Gauss sous sa forme intégrale:

$$\oint_S \vec{E}.\vec{n}dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Où $\vec{n}$ est la normale à la surface fermée englobant la charge q.

III-3-1 Symétries des sources (causes) et des effets crées : Principe de Curie

Les effets présentent les mêmes symétries que leurs causes. Les éléments de symétrie des causes (distributions D ou sources) doivent donc se retrouver dans les effets ($\vec{E}$ et V) produits.

a) Distribution de charge présentant un plan de symétrie pair (Π)

On dit qu'une distribution de charge (D) est symétrique par rapport à un plan Π, si pour deux points P et P' symétriques par rapport à Π, on a (figure III-5) :

$\rho'(P') = \rho(P)$.

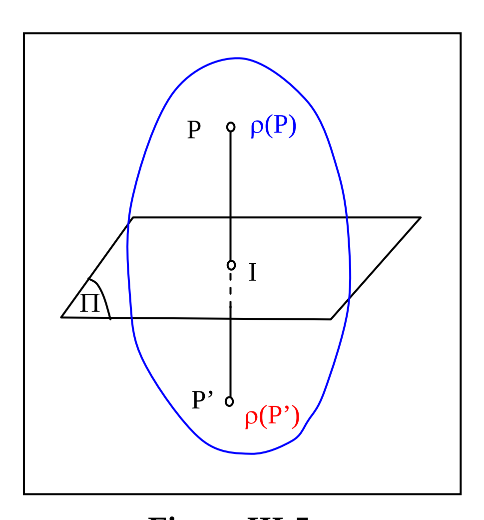


Figure III-5

Pour illustrer ce cas, nous prenons **deux charges identiques q** placées en P et P', où P' est le symétrique de M par rapport au plan Π.

Soit M' le symétrique du point M par rapport au plan Π. On peut constater sur la figure III-6 que le champ en M' est le **symétrique** du champ en M :

$\vec{E}(M') = sym\vec{E}(M)$ et $V(M') = symV(M)$

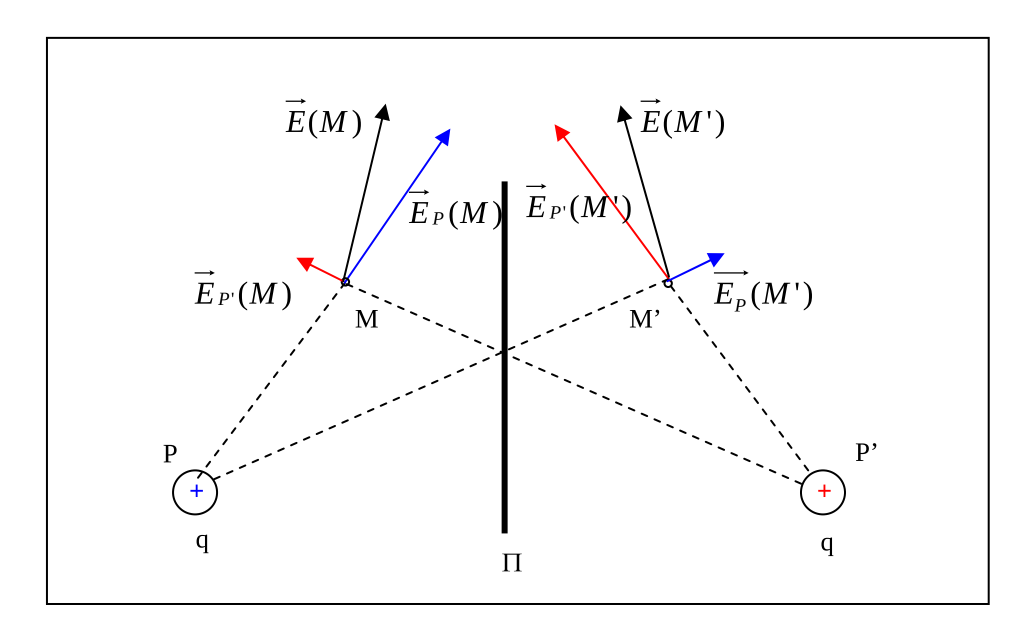


Figure III-6

On remarque que les composantes du champ parallèles au plan de symétrie $\vec{E}_{//}$ sont conservées alors que celles perpendiculaires au plan $\vec{E}_{\perp}$ sont inversées :
$\vec{E}_{//}(M') = \vec{E}_{//}(M)$ et $\vec{E}_{\perp}(M') = -\vec{E}_{\perp}(M)$

En particulier, en un point du plan de symétrie (M = M') on a (figure III-7):

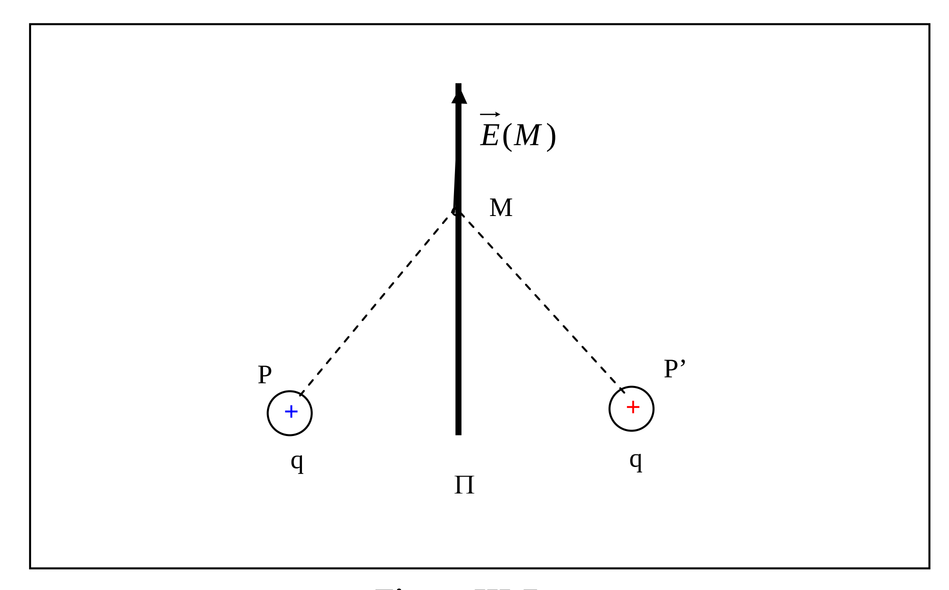


Figure III-7

$\vec{E}_{\perp}(M) = \vec{0}$ d'où : $\vec{E}(M) = \vec{E}_{//}(M) + \vec{E}_{\perp}(M) = \vec{E}_{//}(M)$

Le champ électrique est **<u>contenu</u>** dans le plan de symétrie paire. Dune façon générale tout **<u>vecteur polaire</u>** est contenu dans le plan de **<u>symétrie paire</u>** (figure III-7).

<u>b) Distribution de charge présentant un plan de symétrie impair (Π')</u>

Une distribution de charge possède un plan de symétrie impaire Π', si pour deux points P et P' symétriques par rapport à Π', on a

$\rho'(P') = -\rho(P)$

Pour illustrer ce cas, nous prenons **deux charges q** et – q placées en P et P', où P' est le symétrique de M par rapport au plan Π'.

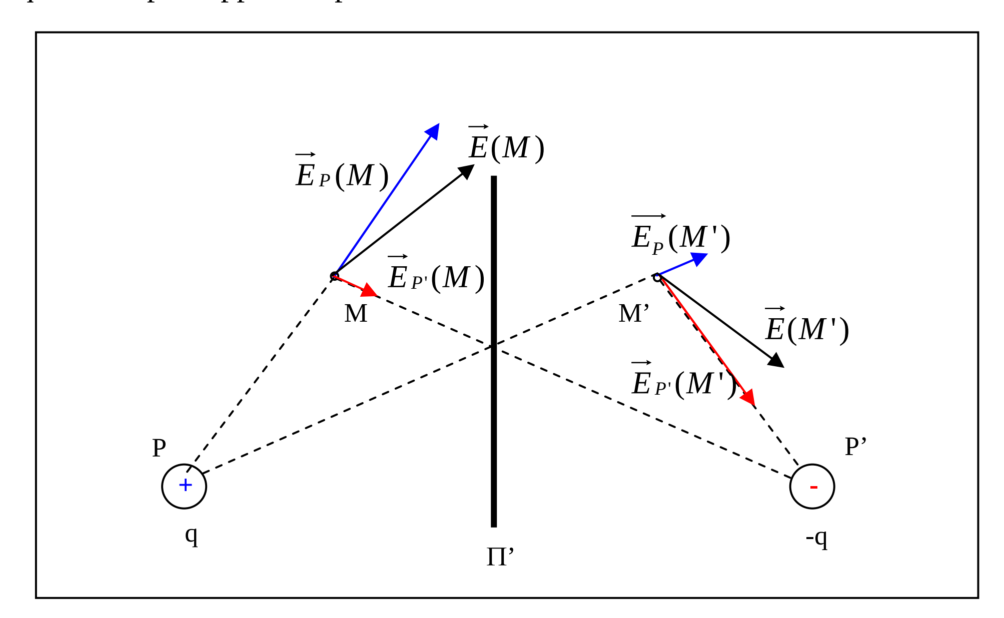


Figure III-8

Soit M' un point symétrique de M par rapport à Π', On peut constater sur la figure III-8 que le champ en M' est **l'opposé** du symétrique du champ en M :

$\vec{E}(M') = -sym\vec{E}(M)$ et $V(M') = -symV(M)$

A l'inverse du cas précèdent, on remarque sur la figure III-8 que les composantes du champ parallèles au plan de symétrie impair Π' sont opposées alors que celles perpendiculaires au plan sont conservées :

$\vec{E}_{//}(M') = -\vec{E}_{//}(M)$ et $\vec{E}_{\perp}(M') = \vec{E}_{\perp}(M)$

Si M appartient au plan de symétrie impaire (M = M'), on aura (figure III-9) :

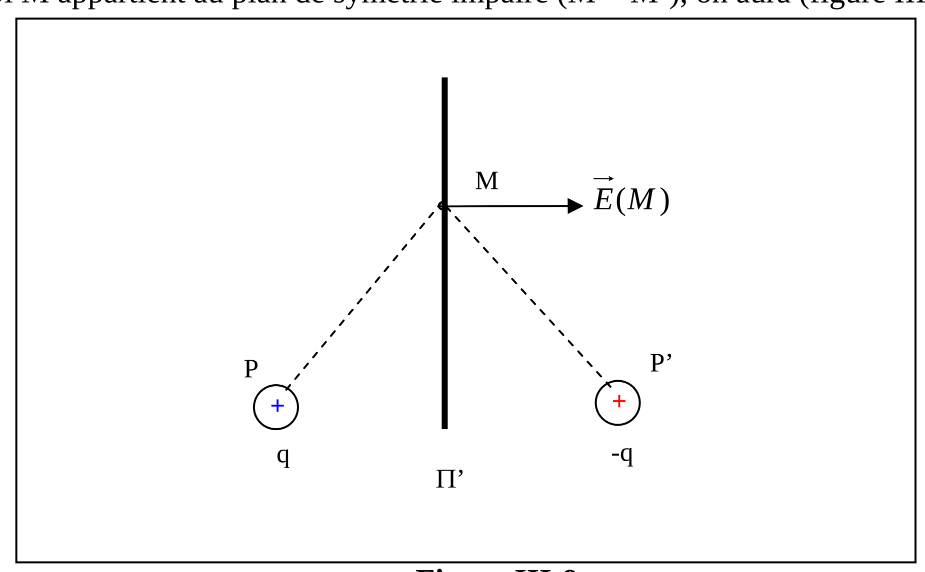


Figure III-9

On a donc, $\vec{E}_{//}(M) = 0$ et $\vec{E}(M) = \vec{E}_{//}(M) + \vec{E}_{\perp}(M) = \vec{E}_{\perp}(M)$

Tout **<u>vecteur polaire</u>** est **<u>perpendiculaire</u>** à un plan de **<u>symétrie impaire</u>**.

c) Conséquences

Lors d'une opération de symétrie appliquée à la distribution de charges (D), le champ électrostatique $\vec{E}$ subit la même opération. On dit que le vecteur champ électrique est un vecteur **polaire** ou "**vrai**" vecteur. Ce vecteur a les mêmes propriétés de symétrie que ses sources.

Les plans de symétrie nous permettent souvent de trouver la **direction** du champ en un point M. Pour trouver la direction du champ $\vec{E}$ en un point M, il suffit de trouver :

* Soit deux plans de symétrie passant par M. Le champ $\vec{E}$ appartenant à ces deux plans. Il est donc porté par la droite formée par leur intersection.
* Soit un plan de symétrie impair passant par M. La direction du champ $\vec{E}$ au point M est donnée par la normale au plan de symétrie impaire.

Les plans de symétrie permettent d'obtenir les **composantes** du champ $\vec{E}$.

III-3-2 Invariance de la distribution de charge

a) Invariance par translation le long d'un axe

Les variables dont dépendent ces composantes sont obtenues en étudiant les invariances de la distribution de charges.

Dans la plupart des cas nous utilisons des distributions idéalisées, par exemple pour calculer le champ $\vec{E}$ crée par un fil en un point M de l'espace homogène et isotrope, très proche du fil, on peut considérer que le fil est infini. Considérons l'exemple d'un fil rectiligne caractérisé par une densité linéique λ uniforme.

Si on translate le fil **parallèlement à lui même** d'un vecteur $\vec{T}$, la nouvelle distribution D' coïncide avec D (puisque le fil est considéré infini et la distribution de charge est uniforme). (figure III-10-a).

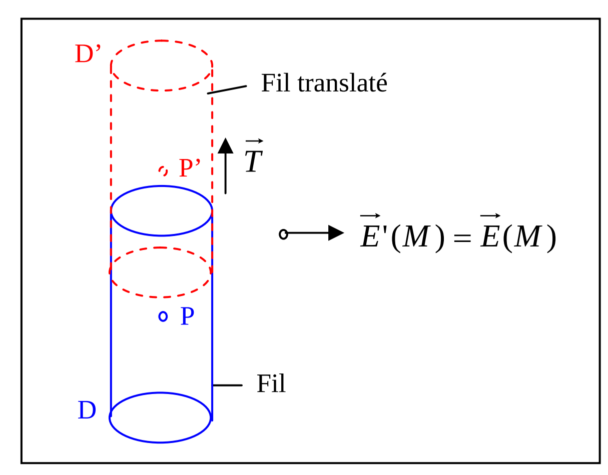


Figure III-10-a

Figure III-10-b

On a :

$$\lambda'(P) = \lambda(P)$$

D'après le principe de Curie, le champ $\vec{E}(M)$ et le potentiel V(M) sont inchangés en un point M quelconque de l'espace homogène et isotrope :

$$\vec{E}'(M) = \vec{E}(M)$$

Pour un autre point quelconque M' tel que: $\overrightarrow{MM'} = \vec{T}$, on a aussi (figure III-10-b) :

$\vec{E}'(M') = \vec{E}(M')$

Comme une opération de translation ne modifie pas le vecteur $\vec{E}'$, il vient :

$\vec{E}'(M') = \vec{T}(\vec{E}(M)) = \vec{E}(M)$

On obtient finalement

$\vec{E}(M') = \vec{E}(M)$ et $V(M') = V(M)$

Si une distribution de charge admet une **symétrie de translation**, les grandeurs physiques **ne dépendent pas de la variable décrivant axe de translation**. Si par exemple, on repère le point M par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) et que $\vec{T} = z_0\vec{u}_z$ (annexe 1), les relations précédentes de $\vec{E}$ et V s'écrivent :

$E(x, y, z + z_0) = E(x, y, z)$ et $V(x, y, z + z_0) = V(x, y, z)$

Ces relations doivent être invariantes quelque soit z_0 :

$\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y)$ et $V(M) = V(x, y)$

L'existence de cet élément de translation a permis de limiter le nombre de variables indépendantes (x, y, z) aux deux coordonnées x et y.

b) Invariance par rotation autour d'un axe

Considérons une répartition de charge D de densité volumique uniforme ρ présentant un axe de révolution, c'est à dire si on fait subir à cette distribution une rotation d'angle θ autour de cet axe, la nouvelle distribution D' coïncide avec la précédente (la distribution reste invariante) (figure III-11-a).

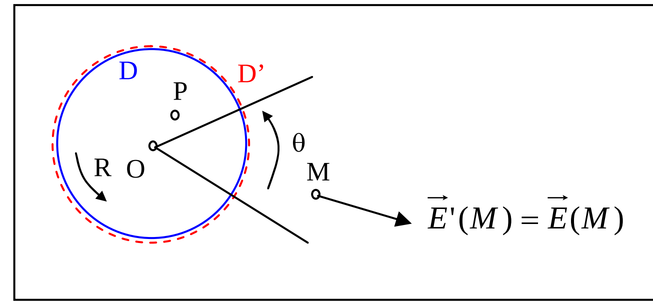


Figure III-11-a

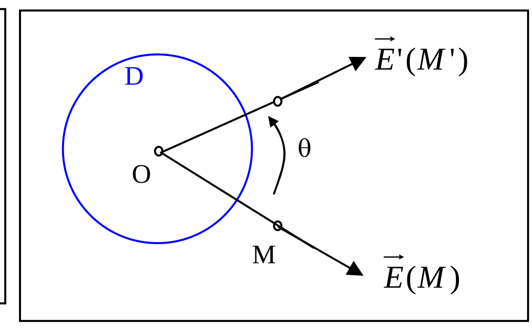


Figure III-11-b

On a :

$\rho'(P) = \rho(P)$

D'après le principe de Curie, cette opération de symétrie pour D l'est aussi en un point M de l'espace homogène et isotrope, pour $\vec{E}$.

Si on considère un point M' quelconque obtenu par rotation du point M d'un angle θ on aura (figure III-11-b) :

$E'(M') = E(M')$

Si nous choisissons les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) (annexe 1) et $\overrightarrow{Oz}$ l'axe de symétrie de rotation de la distribution le potentiel et le champ électriques ne doivent pas dépendre de θ car le système est invariant lors de la rotation :

$\vec{E}(M) = \vec{E}(\rho, z)$ et $V(M) = V(\rho, z)$

On voit que l'existence d'un axe de révolution et le choix approprié du système de coordonnées, ont permis de limiter le nombre de variables indépendantes dont dépendent $\vec{E}$ et V (ici a deux ρ et z).

III-4 CONCLUSION

Le théorème de Gauss établit une relation entre le **flux du champ électrique** à travers une surface fermée et la charge à l'intérieur de cette surface. Cette relation a les propriétés suivantes :

- elle reflète les propriétés générales des champs électriques et ne se limite pas aux champs électrostatiques (contrairement à la loi de Coulomb);
- **elle permet de déterminer plus simplement l'expression du champ électrostatique** créé par les distributions de charges qui présentent une symétrie appropriée (sphérique, cylindrique, plan, etc.).

Chapitre IV

LE DIPOLE ELECTROSTATIQUE

IV-1 INTRODUCTION

Un **dipôle électrostatique** se définit par une répartition particulière de charges électriques telles que le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec celui des charges négatives (le système est globalement neutre). Le dipôle le plus simple est donc un couple de deux charges de signe opposé distantes d'une longueur a non nulle. Cette notion est principalement utilisée en électromagnétisme et par suite en chimie où certaines liaisons entre molécules peuvent être expliquées en modélisant ces molécules par un dipôle (liaison hydrogène par exemple). En physique, on s'intéresse au champ électrostatique $\vec{E}(r)$ créé en un point r **éloigné** du dipôle (on parle alors de **dipôle actif**). Mais on peut aussi étudier le comportement du dipôle lorsqu'il est placé dans un champ extérieur (on parle alors de **dipôle passif**).

IV.2 POTENTIEL ET CHAMP ELECTROSTATIQUES CREES PAR UN DIPOLE ISOLE

IV-2.1 Définition

Le dipôle électrostatique est l'ensemble de **deux** charges électriques **égales** et de signes **contraires** (-q) et (+q) (q > 0), (figure IV-1). Ces deux charges sont fixées respectivement en deux points A et B séparées d'une distance ($a = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$). On se propose d'étudier les caractéristiques du champ et du potentiel électrostatique crées par ces deux charges en un point M très éloignés des charges : a << $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$: **approximation dipolaire**.

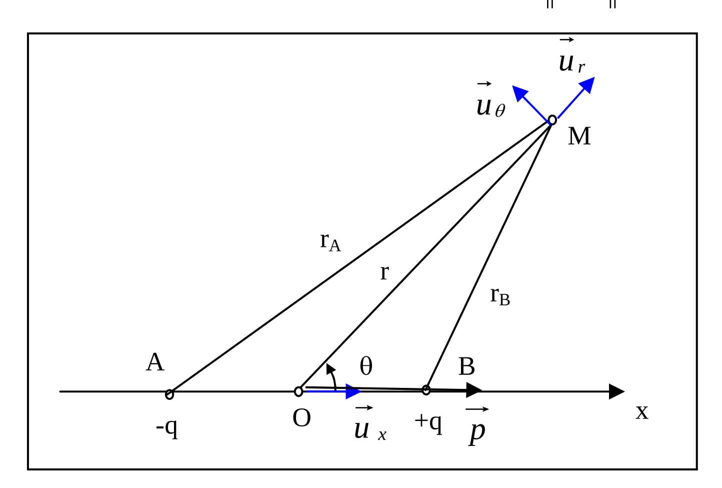


Figure IV-1

IV-2.2 Moment dipolaires électriques

Soient deux charges ponctuelles –q, +q fixées respectivement en A et B (q > 0). Le moment dipolaire électrique (ou moment du dipôle) est une grandeur vectorielle définie par (figure IV-1):

$$\vec{p} = -q\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} = q\overrightarrow{AB}$$

En désignant par a la distance séparant A et B, la norme du moment dipolaire vaut :
$p = \left\| \vec{p} \right\| = qa$

Le moment dipolaire décrit la charge et sa géométrie. Il permet de caractériser le dipôle. Son unité dans le système International (SI) est le Coulomb-mètre (C m).

IV-2.3 Calcul du potentiel électrostatique

Soient deux charges ponctuelles –q, +q fixées respectivement en A et B (figure IV-1) distant de (a). Considérons un point M très éloignés des charges, ce qui revient à considérer la distance a très inférieure à celle qui sépare M de l'une ou l'autre charge (la distance a est agrandie pour des raisons de clarté).

La position de M est repéré dans le système des coordonnées **polaires** (r, θ). Nous choisissons de prendre pour axe (Ox), la droite qui joint les deux charges tel que l'origine O soit au milieu du segment AB qui joint les charges (Ox es l'axe de révolution de la distribution).

D'après le principe de superposition, le potentiel V(M) créé par le dipôle en un point M repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) est donnée par :

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = \frac{q_A}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_A} + \frac{q_B}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_B} = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\left(r_B^{-1} - r_A^{-1}\right)$$

avec,

* $r_B = \left\| \overrightarrow{BM} \right\|$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}$$

$$r_B^2 = \left\| \overrightarrow{BM} \right\|^2 = (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{BO}^2 + 2\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}^2$$

où, $\left\| \overrightarrow{OM} \right\| = r$; $\left\| \overrightarrow{OB} \right\| = \frac{a}{2}$ et $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{OM} = \frac{a}{2} r \cos(\pi - \theta) = -\frac{ar}{2}\cos\theta$

on a :

$$r_B^2 = \left\| \overrightarrow{BM} \right\|^2 = r^2 - ar\cos\theta + \frac{a^2}{4} = r^2(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2})$$

* $r_A = \left\| \overrightarrow{AM} \right\|$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$$

$$r_A^2 = \left\| \overrightarrow{AM} \right\|^2 = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{OM}^2 + 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA}^2$$

où, $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AO} = \frac{ar}{2}\cos\theta$ et $\left\| \overrightarrow{OA} \right\| = \frac{a}{2}$

Ainsi,

$$r_A^2 = \left\| \overrightarrow{AM} \right\|^2 = r^2 + ar\cos\theta + \frac{a^2}{4} = r^2(1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2})$$

Nous avons donc,

$$r_A = \left\| \overrightarrow{AM} \right\| = r\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{1/2} \text{ et } r_A^{-1} = r^{-1}\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-1/2}$$

$$r_B = \left\| \overrightarrow{BM} \right\| = r\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{1/2} \text{ et } r_B^{-1} = r^{-1}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-1/2}$$

Puisque $a/r << 1$, on a : $a^2/(4r^2) << a/r$, on peut négliger les termes en $(a/r)^2$ devant le terme en (a/r) :

$$r_A^{-1} \cong r^{-1}\left(1+\frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}$$

$$r_B^{-1} \cong r^{-1}\left(1-\frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}$$

Etant donné que a << r, on peut développer r_A^{-1} et r_B^{-1} en puissance de (a/r) et ne retenir que le terme du premier ordre $(1+x)^{-1/2} = 1-\frac{1}{2}x+\ldots$:

$$r_A^{-1} \cong r^{-1}\left(1-\frac{1}{2}\frac{a}{r}\cos\theta\right)$$

et $r_B^{-1} \cong r^{-1}\left(1+\frac{1}{2}\frac{a}{r}\cos\theta\right)$

d'où :

$$r_B^{-1} - r_A^{-1} = r^{-1}\left(1+\frac{1}{2}\frac{a}{r}\cos\theta\right) - r^{-1}\left(1-\frac{1}{2}\frac{a}{r}\cos\theta\right) = \frac{a}{r^2}\cos\theta$$

Le potentiel V(M) est donc donné par :

$$V(M) = \frac{qa\cos\theta}{4\Pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\Pi\varepsilon_0 r^2}$$

Soit $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position du point M par rapport au point O (milieu de [A, B]) et $\vec{p}$ le moment dipolaire (figure IV-2).

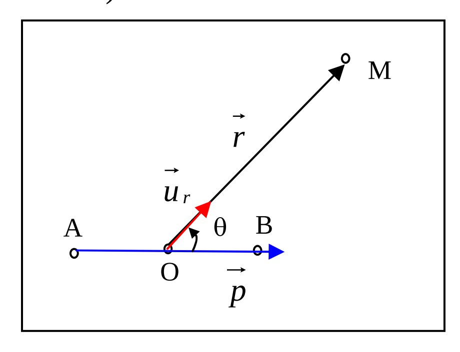


Figure IV-2

On a :

$$\vec{p}.\vec{r} = pr\cos\theta$$

Le potentiel V(M) s'écrit donc :

$$V(M) = \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\Pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p}.\vec{u}_r}{4\Pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{(IV-3)}$$

Cette expression qui fait intervenir un produit scalaire est indépendante de tout système de coordonnées

Il faut remarquer que la **décroissance** du potentiel en créer par un **dipôle** $(1/r^2)$ est plus rapide que dans le cas d'une **charge** ponctuelle qui est en (1/r).

IV-2.4 Calcul du champ électrostatique

IV-2.4.1 Composantes du champ en coordonnées polaires

Le dipôle présente une symétrie de révolution autour de (AB). Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est donc contenu dans le plan (M, AB) (figure IV-3).

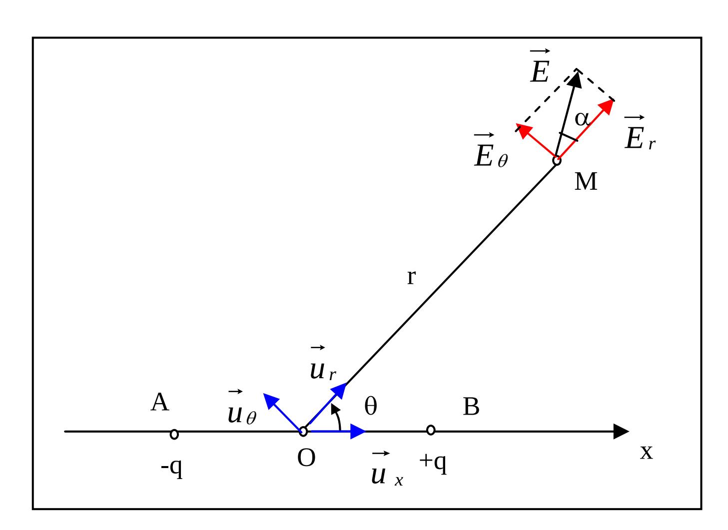


Figure IV-3

D'après le principe de superposition, le champ en M est donné par :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M) = E_r\vec{u}_r + E_\theta\vec{u}_\theta \quad (\vec{E}_z = \vec{0})$$

Pour calculer les composantes du champ, utilisons la relation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$$

avec, $\overrightarrow{grad}V(M) = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$ et $V(M) = \frac{p\cos\theta}{4\Pi\varepsilon_0 r^2}$

Les composantes du champ dérivant du potentiel V(M) s'écrivent dans le système de coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}_r = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r = \frac{2p\cos\theta}{4\Pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u}_r$$

$$\vec{E}_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta = \frac{2p\sin\theta}{4\Pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u}_\theta$$

θ	0	Π/2	Π	3Π/2
$\vec{E}_r$	$\vec{E}_1 = \frac{2p}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_r}{r^3}$	$\vec{E}_r = \vec{0}$	$\vec{E}_3 = \vec{E}_r = \vec{E}_1$	$\vec{E}_r = \vec{0}$
$\vec{E}_\theta$	$\vec{E}_\theta = \vec{0}$	$\vec{E}_2 = \frac{p}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_\theta}{r^3}$ $E_2 = E_1/2$	$\vec{E}_\theta = \vec{0}$	$\vec{E}_4 = \vec{E}_2$

Il faut remarquer que la **<u>décroissance</u>** du champ en ($1/r^3$) créés par un **<u>dipôle</u>** est plus rapide que dans le cas d'une **<u>charge</u>** ponctuelle qui est en ($1/r^2$).

Le module de $\vec{E}(M)$ est :

$$\left\|\vec{E}\right\| = \frac{p}{4\Pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

Soit α l'angle que fait $\vec{E}$ avec la radiale : $\alpha = (\vec{E}, \vec{u}_r)$

$$tg\alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{tg\theta}{2}$$

Notons que les composantes cartésiennes du champ suivant $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$ (du plan AMB) s'écrivent :

$\vec{u}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ et $\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$

$$\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta = \frac{2p\cos\theta}{4\Pi\varepsilon_0 r^3}(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + \frac{p\sin\theta}{4\Pi\varepsilon_0 r^3}(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = \frac{p}{4\Pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)\vec{i} + \frac{p}{4\Pi\varepsilon_0 r^3}(3\sin\theta\cos\theta)\vec{j}$$

IV-2.4.2 Formulation globale du champ $\vec{E}$

Nous pouvons exprimer $\vec{E}$ uniquement en fonction de $\vec{p}$ et de $\vec{r}$ en calculant le gradient de V(M) :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) = -\overrightarrow{grad}\left(\frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\Pi\varepsilon_0 r^3}\right) = -\frac{1}{4\Pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{grad}(\vec{p}.\vec{r}) - \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\Pi\varepsilon_0}\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

Or,

En posant : $\vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}$ et $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

* $\overrightarrow{grad}(\vec{p}.\vec{r}) = \overrightarrow{grad}(p_x x + p_y y + p_z z) = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k} = \vec{p}$

* $\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^5}\vec{r}$

D'où l'expression intrinsèque de $\vec{E}$ en fonction de $\vec{p}$ et de $\vec{r}$:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}.\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right) \qquad \text{(IV-5)}$$

Les effets électriques $\vec{E}$ et V produits par le dipôle sont entièrement déterminés par son moment dipolaire $\vec{p}$. Il faut remarquer que la décroissance du potentiel en ($1/r^2$) et du champ en ($1/r^3$) créés par un dipôle est plus rapide que dans le cas d'une charge ponctuelle.

Notons que les composantes cartésiennes du champ suivant $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$ (du plan AMB) peuvent être également obtenues en écrivant :

$\vec{p}.\vec{r} = pr\cos\theta$; $\vec{r} = r\cos\theta\vec{i} + r\sin\theta\vec{j}$ et $\vec{p} = p\vec{i}$

Ce qui donne d'après l'expression intrinsèque du champ indépendante du système de coordonnées :

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\left(\frac{3pr\cos\theta}{r^5}(r\cos\theta\vec{i} + r\sin\theta\vec{j}) - \frac{p}{r^3}\vec{i})\right)$$

On retrouve donc les composantes calculer à partir des composantes polaires du champ :

$$\vec{E}_x = \frac{p}{4\Pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)\vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{E}_y = \frac{p}{4\Pi\varepsilon_0 r^3}(3\sin\theta\cos\theta)\vec{j}$$

IV.3 ACTION D'UN CHAMP EXTERIEUR UNIFORME SUR UN DIPOLE

Considérons un dipôle A(-q) et B(+q) de moment $\vec{p}$ placé dans un champ **uniforme** $\vec{E}_0$ et tel que $\alpha = (\vec{p}, \vec{E}_0)$ (figure IV-4).

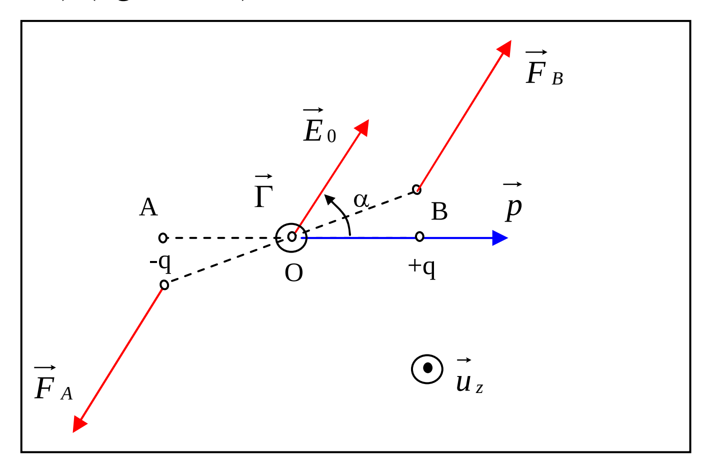


Figure IV-4

IV-3.1 Forces et moment du couple exercés par un dipôle

Chacune des charges subit une force donnée par :

$\vec{F}_A = -q\vec{E}_0$ et $\vec{F}_B = q\vec{E}_0$

Puisque le champ extérieur est **uniforme**, la résultante des forces est évidemment nulle (on ne tiendra pas compte de la force exercée par q sur –q et réciproquement) :

$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$

Par contre, le dipôle subit un **couple** de force ($\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$) dont le moment est :

$\vec{\Gamma} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_A + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_B = \overrightarrow{OA} \wedge (-\vec{F}_B) + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_B = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_B = q\overrightarrow{AB} \wedge \vec{E}_0$

Ce qui donne :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0 = \|\vec{p}\| \|\vec{E}_0\| \sin\alpha \, \vec{u}_z \qquad \text{(IV-6)}$$

avec, $\vec{u}_z$ est un vecteur unitaire de la direction (z'z) du repère (Oxyz). $\vec{\Gamma}$ est un vecteur perpendiculaire au plan formé par $\vec{p}$ et $\vec{E}_0$.

Si on libère le dipôle, il tend sous l'action de $\vec{\Gamma}$ à tourner pour atteindre une position d'équilibre ($\vec{\Gamma} = \vec{0}$) dans laquelle $\vec{p}$ et $\vec{E}_0$ sont colinéaires : $\alpha = (\vec{p}, \vec{E}_0) = 0 \text{ ou } \Pi$.

- Pour $\alpha = 0$ ($\vec{p}$ a le même sens que $\vec{E}_0$).

Si on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre, le couple de force tend à le ramener à cette position (figure IV-5-a). L'équilibre est **stable.**

- Pour $\alpha = \Pi$ ($\vec{p}$ est antiparallèle à $\vec{E}_0$).

Si on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre, le couple de force tend à l'éloigner de cette position (figure IV-5-b). L'équilibre est **instable.**

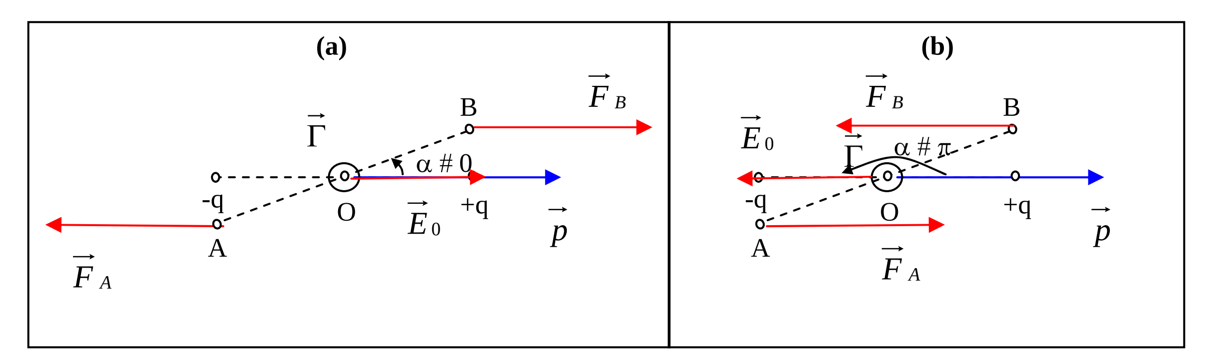


Figure IV-5

Ainsi, l'action mécanique principale d'un champ **uniforme** est qu'il tend à orienter le dipôle suivant les **lignes du champ** $\vec{E}_0$.

IV-3.2 Energie potentielle d'interaction du dipôle

C'est l'énergie nécessaire pour amener +q et –q de l'infini à leur position en B et A. Les charges –q et +q fixées en A et B ont des énergies potentielles égales à $-q(V'_A - 0)$ et $q(V'_B - 0)$. Ainsi, l'énergie potentielle d'interaction W associé au champ extérieur $\vec{E}_0$ est :
$W = q(V'_B - V'_A)$

Soit V' le potentiel dont dérive le champ $\vec{E}_0$.

$$dV' = -\vec{E}_0.d\vec{r}$$

$$V'_A - V'_B = -\int_A^B dV' = \int_A^B \vec{E}_0.d\vec{r} = E_0 \cos\alpha \int_A^B dr = E_0 \cos\alpha a = \vec{E}_0.\overrightarrow{AB}$$

Ainsi,

$$W = -\vec{p}.\vec{E}_0 = -pE_0 \cos\alpha \qquad \text{(IV-7)}$$

Cette expression représente l'énergie d'interaction du dipôle associée au champ $\vec{E}_0$ et n'a rien à voir avec **l'énergie de interne du dipôle** (énergie nécessaire pour amener une charge de l'infini à une distance a de l'autre). Nous **retrouvons** les positions d'équilibre :

- Pour $\alpha = 0$ ($\vec{p}$ a le même sens que $\vec{E}_0$), $W = -pE_0$

L'énergie potentielle est **minimale** et l'équilibre est **stable**.

- Pour $\alpha = \Pi$ ($\vec{p}$ est antiparallèle à $\vec{E}_0$), $W = pE_0$

L'énergie potentielle est maximale et l'équilibre instable.

IV-4 Conclusion

Le champ créé par un dipôle dans le cadre de l'approximation dipolaire est proportionnel à $1/r^3$ et le potentiel à $1/r^2$, alors que pour une charge ponctuelle, le champ créé est proportionnel à $1/r^2$ et le potentiel à 1/r.



Exercices corrigés

Calcul de la force et du champ électrostatiques crées par des charges ponctuelles

1- Force électrostatique crée par des charges ponctuelles identiques aux sommets d'un carré en chaque sommet du carré

1-1 Enoncé

Quatre charges ponctuelles identiques –q (q > 0) sont fixées aux sommets A, B, C et D d'un carré de côté a. Une cinquième charge $q_0 > 0$ est maintenue fixe au centre O du carré.

Déterminer la valeur de q_0 en fonction de q pour que la force électrostatique totale qui s'exerce sur chacune des cinq charges soit nulle.

1-2 Solution

La force électrostatique $\vec{F}(O)$ exercée par les quatre charges identiques –q sur la charge q_0 est nulle quelle que soit la valeur de q_0. Il reste à évaluer la force totale exercée sur chacune des charges –q, par exemple la charge placée en A (figure 1).

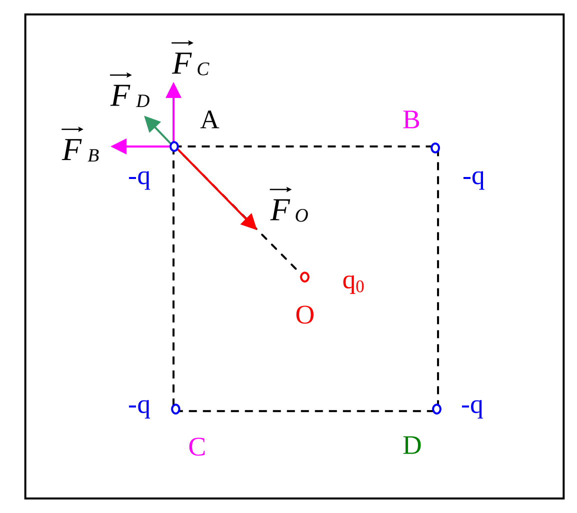


Figure 1

D'après le principe de superposition :

$$\vec{F}(A) = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i = \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F}_O = \frac{q^2}{4\Pi\varepsilon_0}\left(\frac{\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^3} + \frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|^3} + \frac{\overrightarrow{DA}}{\left\|\overrightarrow{DA}\right\|^3}\right) - \frac{qq_0}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OA}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|^3}$$

Or,

* $\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \left\|\overrightarrow{CA}\right\| = a$

* $DA^2 = AB^2 + BD^2 = 2a^2$ aisni, $\left\|\overrightarrow{DA}\right\| = \sqrt{2}\,a$

* $OA = \frac{DA}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

Ainsi,

$$\vec{F}(A) = \frac{q^2}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\overrightarrow{DA}\right) - \frac{qq_0}{4\Pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3\overrightarrow{OA}$$

Or, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3 = 2\sqrt{2}$

$$\vec{F}(A) = \frac{q^2}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \frac{\sqrt{2}}{4}\overrightarrow{DA}\right) - \frac{qq_0}{4\Pi\varepsilon_0}2\sqrt{2}\,\overrightarrow{OA}$$

Puisque : $\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{CO}$

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}) = 2\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{OA}$;

$$= \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0 a^3}\left(q(2+\frac{\sqrt{2}}{4}2) - q_0 2\sqrt{2}\right)\overrightarrow{OA} = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0 a^3}\left(q(2+\frac{\sqrt{2}}{2}) - q_0 2\sqrt{2}\right)\overrightarrow{OA}$$

La force $\vec{F}(A)$ est nulle lorsque :

$$q(2+\frac{\sqrt{2}}{2}) - q_0 2\sqrt{2} = 0$$

Ainsi,

$$q_0 = q\frac{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}} = q\frac{1+2\sqrt{2}}{4}$$

2- Champ électrostatique crée par des charges ponctuelles identiques aux sommets d'un triangle au centre géométrique du triangle

2-1 Enoncé

Déterminer le champ électrostatique crée par trois charges ponctuelles identiques q > 0 placées aux sommets d'un triangle équilatéral, en son centre géométrique G.

2-2 Solution

D'après le principe de superposition, on a (figure 2):

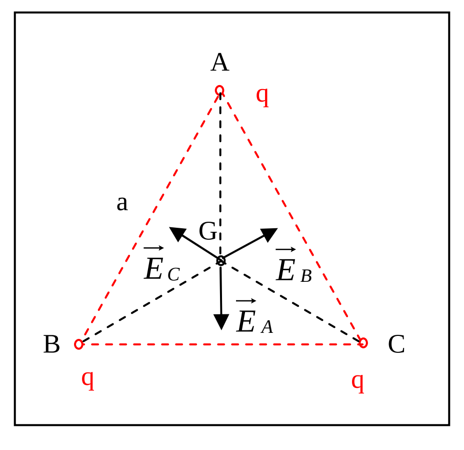


Figure 2

$$\vec{E}(G) = \sum_{i=1}^{3}\vec{E}_i = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$$

$$= \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\left(\frac{\overrightarrow{AG}}{\left\|\overrightarrow{AG}\right\|^3} + \frac{\overrightarrow{BG}}{\left\|\overrightarrow{BG}\right\|^3} + \frac{\overrightarrow{CG}}{\left\|\overrightarrow{CG}\right\|^3}\right)$$

Or, $\left\|\overrightarrow{AG}\right\| = \left\|\overrightarrow{BG}\right\| = \left\|\overrightarrow{CG}\right\|$

$$\vec{E}(G) = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0\left\|\overrightarrow{BG}\right\|^3}\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}\right)$$

Soit, O étant un point quelconque de l'espace.

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + 3\overrightarrow{OG} = \vec{0} \quad \text{car } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{OA_i}$$

$$\vec{E}(G) = \vec{0}$$

3- Champ électrostatique crée par des charges ponctuelles identiques aux sommets d'un carré en un point de l'axe passant par le centre du carré

3-1 Enoncé

Déterminer le champ électrostatique créé par quatre charge ponctuelle identiques q placées aux sommets d'un carré de côté a, en un point M d'abscisse x de l'axe passant par son centre O et perpendiculaire à son plan (figure 3).

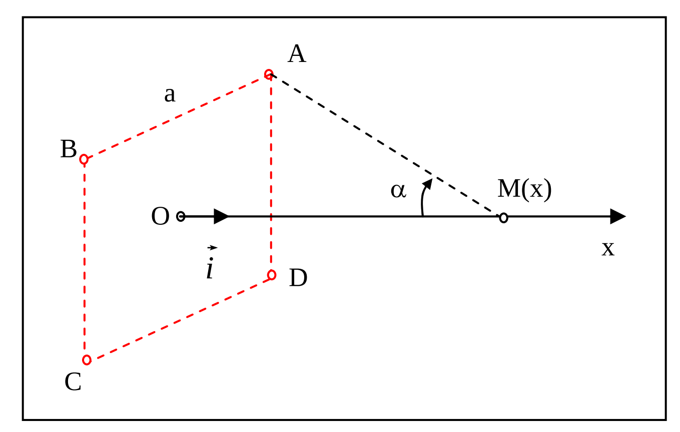


Figure 3

3-2 Solution

D'après le principe de superposition, on a :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{4} \vec{E}_i = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$$

$$= \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\left(\frac{\overrightarrow{AM}}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^3} + \frac{\overrightarrow{BM}}{\left\|\overrightarrow{BM}\right\|^3} + \frac{\overrightarrow{CM}}{\left\|\overrightarrow{CM}\right\|^3} + \frac{\overrightarrow{DM}}{\left\|\overrightarrow{DM}\right\|^3}\right)$$

$$\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \left\|\overrightarrow{BM}\right\| = \left\|\overrightarrow{CM}\right\| = \left\|\overrightarrow{DM}\right\| = (x^2 + \frac{a^2}{2})^{1/2}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM}}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^3}$$

La distribution de charges présente une symétrie de révolution autour de la droite (OM). Le champ résultant en M n'a donc de composante non nulle que suivant cette droite, par exemple la direction x'x de vecteur unitaire $\vec{i}$.

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^3}4\left\|\overrightarrow{AM}\right\|\cos\alpha\vec{i} = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^3}4x\vec{i}$$

soit,

$$\vec{E}(M) = \frac{4qx}{4\Pi\varepsilon_0(x^2 + \frac{a^2}{2})^{3/2}}\vec{i}$$

3-3 Cas limite

- A l'origine O (x = 0), le champ est nul. En effet, d'après la symétrie par rapport à ce point les champs créés par les charges s'annulent deux à deux.
- En un point M éloigné de l'origine O (x >> a), on a :

$$\vec{E}(M) = \frac{4q}{4\Pi\varepsilon_0 x^2 (1+\frac{a^2}{2x^2})^{3/2}}\vec{i} \cong \frac{4q}{4\Pi\varepsilon_0 x^2}\vec{i}$$

C'est le champ équivalent à celui créé en M par une charge Q = 4 q concentrée en O. Son module varie en $\frac{1}{x^2}$ (figure 4).

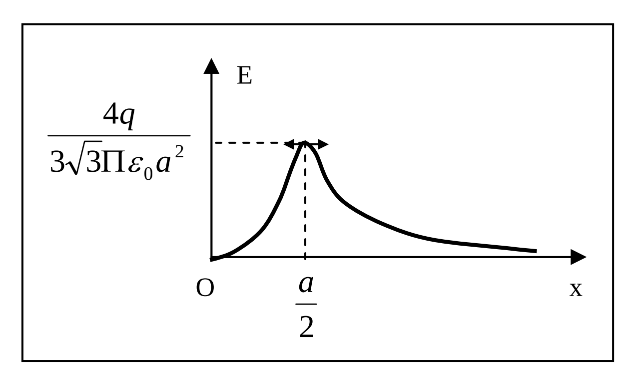


Figure 4

Calcul direct du potentiel et du champ électrostatique crées par une distribution continue de charges

1- Segment de droite uniformément chargé avec la densité linéique

1-1 Enoncé

Soit un segment AB uniformément chargé avec une densité linéique $\lambda > 0$ (figure 1). On désigne par O le milieu du segment AB. Calculer le champ $\vec{E}$ crée par cette distribution en tout point M sur une distance a de la médiatrice de AB et en un point M appartenant au segment AB.

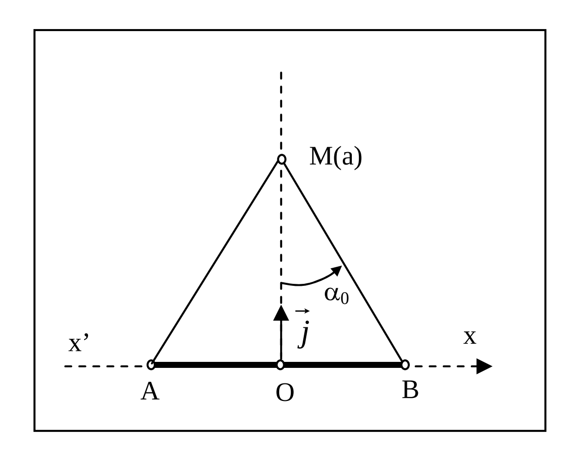


Figure 1

1-2 Solution

1) **<u>Le point M est sur la médiatrice de AB</u>**

Considérons les points A et B sur l'axe x'x tel que l'origine O soit le milieu de AB (figure 2). Deux éléments de charges dq_1 et dq_2, centrés en deux points P_1 et P_2 symétriques par rapport à O, créent en M des champs électrostatiques élémentaires respectivement $d\vec{E}_1$ et $d\vec{E}_2$. La résultante de ces champs est portée par la médiatrice (OM), par exemple l'axe y'y de vecteur $\vec{j}$.

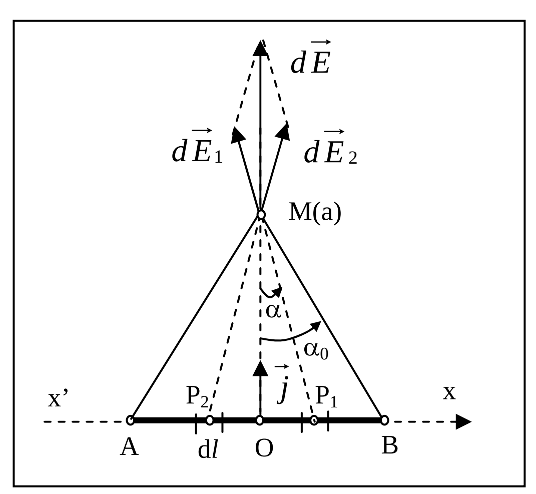


Figure 2

Le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par l'ensemble de la charge portée par le segment AB est donc, par raison de symétrie, dirigé suivant l'axe des y. Soit,

$$d\vec{E}_1 = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_1M}}{\left\|\overrightarrow{P_1M}\right\|^3} = \frac{\lambda dx}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{\vec{u}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}\cos\alpha\,\vec{j}$$

Si on choisit α comme variable d'intégration, on aura :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0}\frac{\cos\alpha}{a}d\alpha\,\vec{j}$$

avec, $tg\alpha = \frac{x}{a}$

$$dx = a(1+tg^2\alpha)d\alpha = \frac{a}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$\frac{1}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2}$$

Pour x = - L, $\alpha = -\alpha_0$ et pour x = + L, $\alpha = \alpha_0$

Soit,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0 a}\sin\alpha_0\,\vec{j} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0 a}\frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}\vec{j}$$

1-3 Cas limite

- Si le point M est très éloigné de l'origine O (a >> L), on a :

$$\sin\alpha_0 = \frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}} \cong \alpha_0 \cong \frac{L}{a}$$

et donc,

$$\vec{E} \cong \frac{2\lambda L}{2\Pi\varepsilon_0 a^2}\vec{j}$$

C'est le champ équivalent à celui créé en M par une charge $Q = 2\lambda L$ concentrée en O.

- Si le point M est très proche du segment (L >> a), on a :

$$\alpha_0 \to \frac{\Pi}{2}$$

et

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0 a}\vec{j}$$

C'est le champ équivalent à celui créé en M par un fil de longueur infinie uniformément chargé.

2) <u>Le point M appartient à (AB)</u>

Un élément de charge $dq = \lambda dx$ centré en P crée en M un champ élémentaire $d\vec{E}$ porté par $\vec{i}$ (figure 3) :

Figure 3

$$d\vec{E}_1 = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} = \frac{\lambda dx}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{i}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{dx}{(a-x)^2}\vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{dx}{(a-x)^2}\vec{i} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{-d(a-x)}{(a-x)^2}\vec{i} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0}\frac{L}{(a^2-L^2)}\vec{i}$$

soit,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0}\frac{L}{(a^2-L^2)}\vec{i}$$

1-4 Cas limite

* Si le point M est très éloigné du segment [AB] (a >> L), on a :

$$\vec{E} \cong \frac{2\lambda L}{4\Pi\varepsilon_0 a^2}\vec{i}$$

C'est équivalent du champ créé en M par une charge $Q = \lambda 2L$ concentrée en O.

2- Répartition linéique de charges non uniforme

2-1 Enoncé

Un fil de section négligeable en forme d'un cercle de centre O et de rayon R placé dans le plan xOy, porte une charge électrique répartie avec une densité linéique λ : $\lambda = \lambda_0 \sin\theta$ où λ_0 est une constante positive et $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})$, P étant un point quelconque du cercle (figure 4).

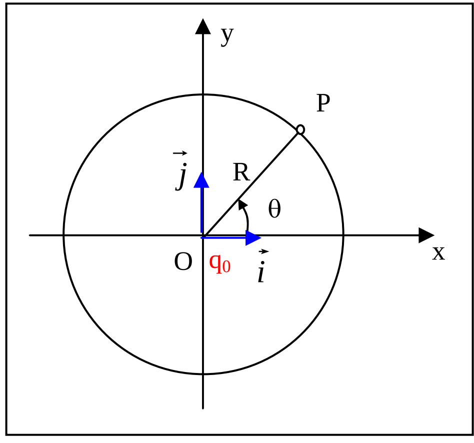


Figure 1

Calculons les composantes de la force $\vec{F}$ exercée sur une charge ponctuelle q_0 (>0), placée en O, par l'ensemble de la charge portée par le cercle.

2-2 Solution

La charge est répartie positivement sur le demi-cercle supérieur (y > 0) et négativement sur le demi-cercle inférieur (y < 0) (figure 5), avec des valeurs maximale et minimale respectivement en $\theta = \frac{\Pi}{2}$ et $\theta = \frac{3\Pi}{2}$.

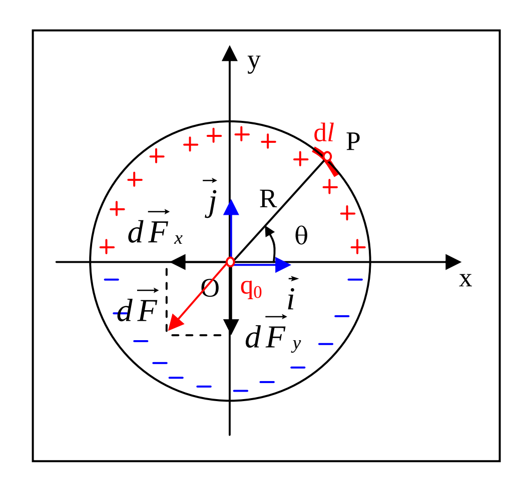


Figure 5

Un élément de charge $dq = \lambda_0 \sin\theta dl$ (avec $dl = Rd\theta$), porté par un élément de longueur dl centré en un point moyen P, exerce sur la charge q_0 placée en O une force électrostatique élémentaire donnée par :

$$d\vec{F} = \frac{q_0 dq}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{PO}}{\left\|\overrightarrow{PO}\right\|^3}$$

avec, $\left\|\overrightarrow{PO}\right\| = R$

Les deux composantes de la force $d\vec{F}$, portées par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (figure 5) s'écrivent :

$$d\vec{F}_x = -\left\|d\vec{F}\right\|\cos\theta\vec{i}$$

et $d\vec{F}_y = -\left\|d\vec{F}\right\|\cos\theta\vec{j}$

Dans ce cas le signe (-) correspond à $0 \le \theta \le \Pi/2$.

Par intégration, on obtient :

$$\left\|\vec{F}_x\right\| = \frac{q_0\lambda_0}{4\Pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\Pi}\sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{q_0\lambda_0}{4\Pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\Pi}\frac{\sin 2\theta}{2}d\theta = \frac{q_0\lambda_0}{8\Pi\varepsilon_0 R}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{2\Pi} = 0$$

$$\left\|\vec{F}_y\right\| = \frac{q_0\lambda_0}{4\Pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\Pi}\sin^2\theta d\theta = \frac{q_0\lambda_0}{4\Pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\Pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{q_0\lambda_0}{8\Pi\varepsilon_0 R}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\Pi} = \frac{q_0\lambda_0}{4\Pi\varepsilon_0 R}$$

Soit,

$$\vec{F} = \vec{F}_y = -\frac{q_0\lambda_0}{8\Pi\varepsilon_0 R}\vec{j}$$

La force totale exercée sur q_0 en O par l'ensemble de la charge portée par le cercle est dirigée suivant ($-\vec{j}$) (figure 6). Elle est répulsive d'un côté ($0 \le \theta \le \Pi$), attractive de l'autre ($\Pi \le \theta \le 2\Pi$).

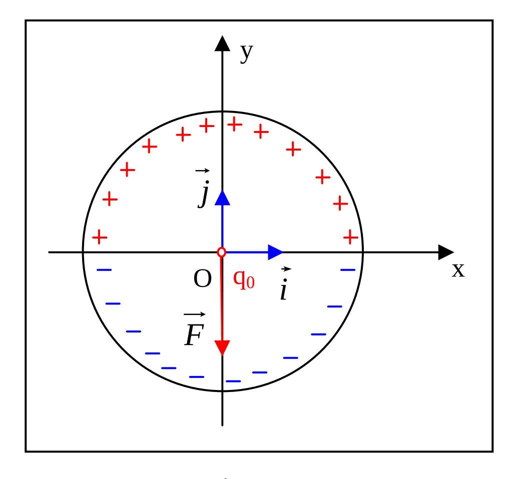


Figure 6

3- Boucle circulaire portant une charge linéique uniforme

3-1 Enoncé

Soit une boucle circulaire de centre O, de rayon R, uniformément chargée avec une densité linéique $\lambda = \lambda_0$ (figure 7). Calculer le champ $\vec{E}$ crée par cette distribution de charges, en un point M de l'axe $\overrightarrow{z'z}$ de la boucle :

a) A partir du potentiel électrostatique
b) Directement

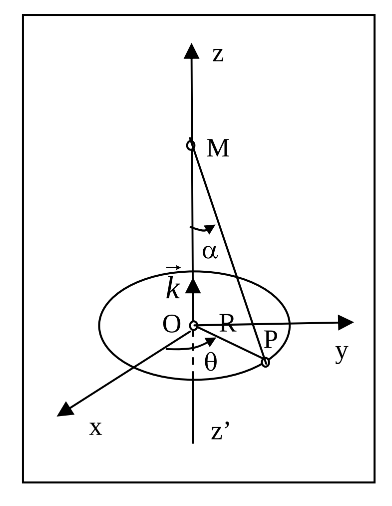


Figure 7

3-2 Solution

<u>a) Calcul du champ électrostatique à partir du potentiel</u>

Le potentiel dV(M) créé en un point M(0, 0, z) par la charge $dq = \lambda dl$ portée par un élément dl de la boucle entourant P (figure 8) est :

La charge $dq = \lambda_0 dl = \lambda_0 R d\theta$ crée en M le potentiel V(M) :

$$dV(M) = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0 \left\|\overrightarrow{PM}\right\|} = \frac{\lambda_0}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{dl}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}$$

avec, $dl = R d\theta$ et $\left\|\overrightarrow{PM}\right\| = (R^2 + z^2)^{1/2}$

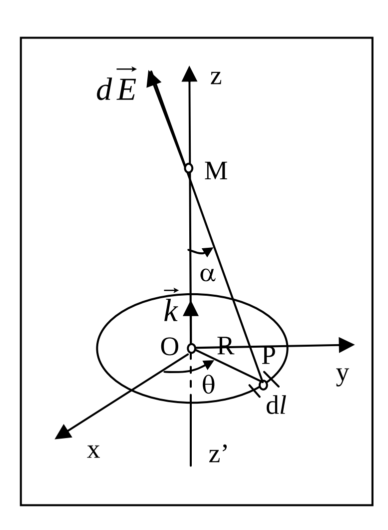


Figure 8

Le potentiel V(M) est obtenu par intégration sur le contour C de la boucle :

$$V(M) = \oint_C dV(M) = \frac{\lambda_0 R}{4\Pi\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} \int_0^{2\Pi} d\theta$$

Ce qui donne :

$$V(M) = \frac{\lambda_0 R}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} = V(0,0,z) = V(0,0,-z)$$

Le champ $\vec{E}(M)$ est déduit du potentiel par dérivation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) = -\frac{dV}{dz}\vec{k} = \frac{\lambda_0 R z}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}\vec{k} = \vec{E}(0,0,z) = -\vec{E}(0,0,-z)$$

b) <u>Calcul direct du champ en un point M(0,0,z)</u>

Examinons d'abord la symétrie du problème : la distribution présente une symétrie de révolution autour de $\overrightarrow{z'z}$. Tout plan contenant l'axe $\overrightarrow{z'z}$ est un plan de symétrie paire de la distribution. Donc le champ $\vec{E}$ en un point de l'axe $\overrightarrow{z'z}$ est porté par $\vec{k}$:

$\vec{E}(M) = \vec{E}(0,0,z) = E(z)\vec{k}$

La charge $dq = \lambda_0 dl = \lambda_0 R d\theta$ crée en M le champ $d\vec{E}$:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} = \frac{\lambda_0\,R\,d\theta}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} = E_z\,\vec{k}$$

Le champ $\vec{E}(M)$ étant porté par $\vec{k}$, seule la composante dE_z est à considérer :

$$dE_z = d\vec{E}_z.\vec{k} = \frac{\lambda_0\,R\,d\theta}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}.\vec{k}}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda_0\,R\,d\theta}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{(R^2+z^2)^{1/2}\cos\alpha}{(R^2+z^2)^{3/2}} \text{ avec, } \cos\alpha = \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E}(M) = \int_{\theta=0}^{\theta=\Pi} dE_z\,\vec{k} = \frac{\lambda_0\,R\,z}{2\Pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}$$

4- Boucle circulaire portant une chargée non uniforme

4-1 Enoncé

On considère à nouveau la boucle circulaire de centre O, de rayon R, cette fois chargée avec une densité linéique de charge $\lambda(P) = \lambda_0 \sin\theta$ où $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})$, figure 7.

Déterminer le potentiel et le champ électrostatique crées par cette répartition de charges en tout point M de l'axe de la boucle.

4-2 Solution

1) Calcul du potentiel

Le potentiel V(M) en un point M de l'axe $\overrightarrow{z'z}$ de la boucle :

$$V(M) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\Pi} \frac{(\lambda_0 \sin\theta)R\,d\theta}{2\Pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}} = 0$$

Le potentiel V(M) = V(0,0,z) en tout point de l'axe $\overrightarrow{z'z}$ est constant et a une valeur nulle. D'après la relation $dV = -\vec{E}.d\vec{r}$, on en déduit que le champ $\vec{E}(M)$ est normal à l'axe $\overrightarrow{z'z}$.

2) Champ électrostatique crée par la boucle

Le plan $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz})$ passant par l'axe $\overrightarrow{z'z}$ de la boucle est un plan de symétrie **impaire** (figure 9) :

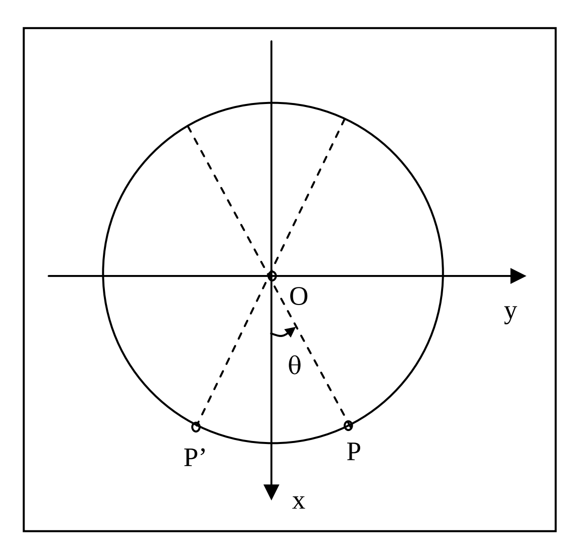


Figure 9

$\lambda(P') = -\lambda(P)$

Le champ $\vec{E}(M) = \vec{E}(0,0,z)$ est normal à ce plan :
$\vec{E}(M) = E(z)\,\vec{j}$

Le champ $d\vec{E}(M)$ créé par la charge $dq = \lambda_0 \sin\theta dl$ entourant le point P (figure 10) est :

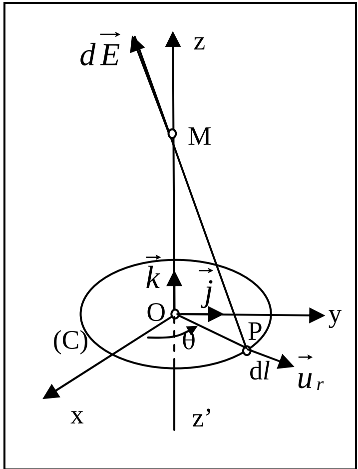


Figure 10

$$d\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0 \sin\theta\, dl}{4\Pi\varepsilon_0 \left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\overrightarrow{PM}$$

Calculons la composante $d\vec{E}_y(M)$:

$$\overrightarrow{PM}.\vec{j} = (-R\vec{u}_r + z\vec{k}).\vec{j} = -R\sin\theta$$

$$\vec{E}(M) = -\vec{j}\frac{\lambda_0 R^2}{4\Pi\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\Pi}\sin^2\theta\, d\theta = -\frac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = -\frac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}\vec{j} = \vec{E}(0,0,z) = \vec{E}(0,0,-z)}$$

4-3 Remarque

Le plan xOy est un plan de symétrie (plan où se trouve la boucle chargée). Nous avons obtenu, comme on s'y **attend**, que le potentiel en M, V(M) = V(0,0,z) est égal au potentiel en M'(0,0,-z) symétrique de M par rapport au plan (xOy) (figure 11).

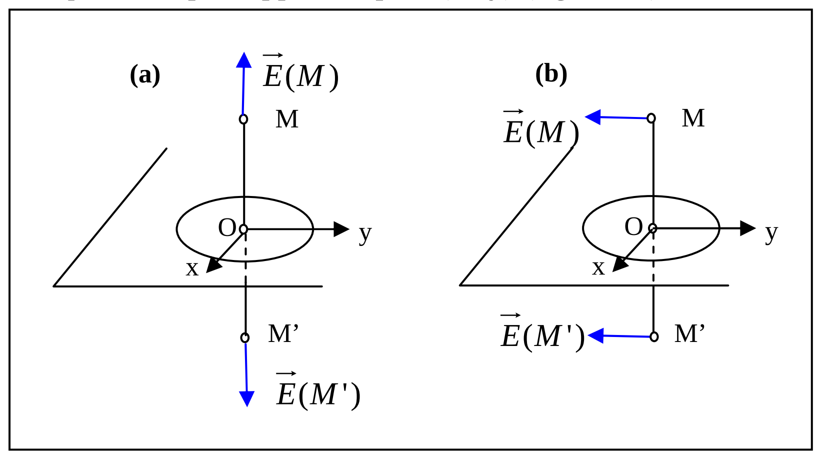


Figure 11

Quant au champ électrostatique, on obtient bien :

* $\vec{E}(M) = -\vec{E}(M')$ quant le champ est normal au plan de symétrie (figure 11-a).

* $\vec{E}(M) = \vec{E}(M')$ quant le champ est parallèle au plan de symétrie (figure 11-b).

5- Disque uniformément chargé avec la densité superficielle uniforme

5-1 Enoncé

Soit un disque de centre O, de rayon R, uniformément chargé avec une densité surfacique de charge σ > 0 (figure 12). Calculer le champ $\vec{E}$ créé par cette distribution de charges en un point M de l'axe $\overrightarrow{z'z}$ du disque :

a) A partir du potentiel électrostatique
b) directement

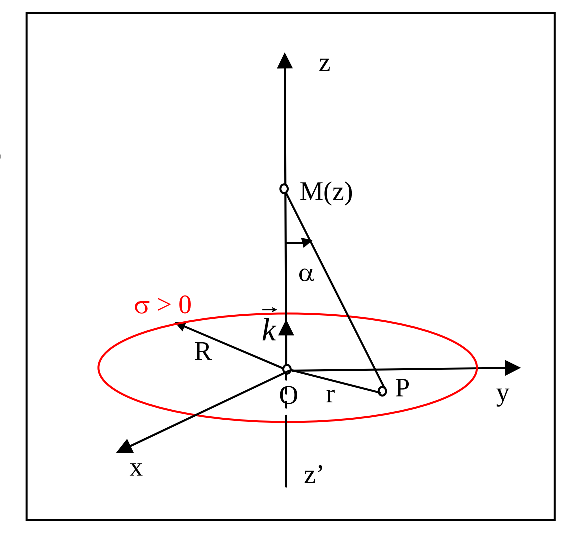


Figure 12

5-2 Solution

a) Calcul du champ électrostatique à partir du potentiel

Le potentiel dV(M) crée en un point M(0,0,z) par la charge $dq = \sigma\, dS$ entourant le point P (figure 13) est :

La charge $dq = \sigma\, dS$ crée en M le potentiel V(M) s'écrit :

$$dV(M) = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0 \left\|\overrightarrow{PM}\right\|} = \frac{\sigma\, dS}{4\Pi\varepsilon_0 \left\|\overrightarrow{PM}\right\|}$$

avec, $dS = r dr d\theta$ et $\left\|\overrightarrow{PM}\right\| = (r^2 + z^2)^{1/2}$

Ce qui donne :

$$dV(M) = \frac{\sigma}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{r\, dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{1/2}}$$

Le potentiel V(M) est obtenu par intégration sur la surface du disque :

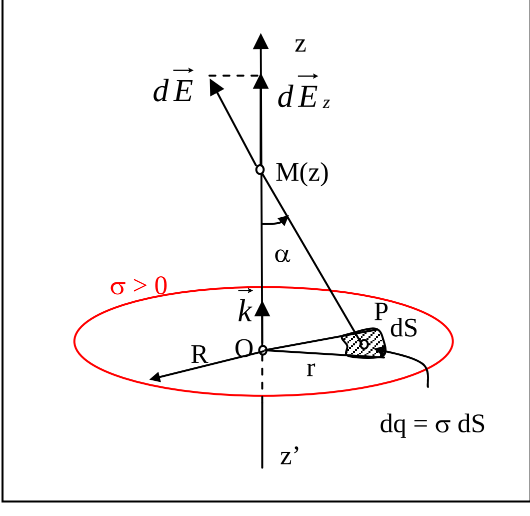


Figure 13

$$V(M) = \frac{\sigma}{4\Pi\varepsilon_0} \int_{\theta=0}^{2\Pi} \int_{r=0}^{r=R} \frac{r dr d\theta}{(R^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[(r^2 + z^2)^{1/2} \right]_{r=0}^{r=R}$$

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[(R^2 + z^2)^{1/2} - |z| \right] = V(0,0,z) = V(0,0,-z)$$

Le champ $\vec{E}(M)$ est déduit du potentiel par dérivation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad} V(M) = -\frac{dV}{dz}\vec{k}$$

Ainsi,

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{k} = \vec{E}(0,0,z) = -\vec{E}(0,0,-z)$$

c) Calcul direct du champ en un point M(0,0,z)

Examinons d'abord la symétrie du problème : la distribution présente une symétrie de révolution autour de $\overrightarrow{z'z}$. Tout plan contenant l'axe $\overrightarrow{z'z}$ est un plan de symétrie paire de la distribution. Donc le champ $\vec{E}$ en un point M de l'axe $\overrightarrow{z'z}$ est porté par $\vec{k}$:

$\vec{E}(M) = \vec{E}(0,0,z) = E(z)\vec{k}$

Un élément de charge $dq = \sigma dS$, centré en P (figure 13), crée en un point M de l'axe du disque un champ élémentaire $d\vec{E}$ donné par :

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}$$

$$dS = \rho d\rho d\theta \;;\; \left\|\overrightarrow{PM}\right\| = \sqrt{\rho^2 + z^2} \;;\; \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}$$

Le disque chargé présente une symétrie de révolution autour de son axe, par exemple l'axe z'z, le champ est alors porté par cet axe. On a :

$$d\vec{E} = \frac{\sigma}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + z^2)}\vec{u}$$

avec, ρ variable radiale cylindrique

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\Pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + z^2)}\cos\alpha\vec{u}_z$$

$$= \frac{\sigma}{4\Pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + z^2)}\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\vec{u}_z$$

$$= \frac{\sigma}{4\Pi\varepsilon_0} z\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\left(\int_0^{2\Pi} d\theta\right)\vec{u}_z$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right]\vec{u}_z$$

soit,

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right]\vec{u}_z$$

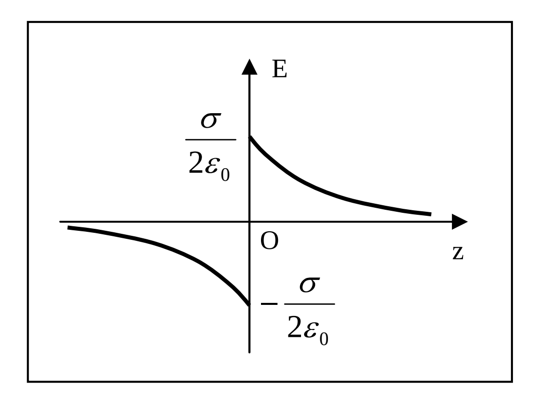


Figure 14

Loin du disque (z grand), le champ s'affaiblit (figure 14).

5-3 Cas limites

- Si le point M est très éloigné du disque, c'est à dire : $|z| >> R$, on aura alors :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z/|z|}{(1 + R^2/z^2)^{1/2}}\right]\vec{u}_z$$

$$\cong \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\left[1 - (1 - \frac{R^2}{2z^2})\right]\vec{u}_z$$

$$\cong \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 z^2}\frac{z}{|z|}\vec{u}_z = \frac{\sigma\Pi R^2}{4\Pi\varepsilon_0 z^2}\frac{z}{|z|}\vec{u}_z$$

C'est l'expression du champ créé en M par une charge $Q = \sigma\Pi R^2$ placée en O.

- Si le point M est très proche du disque, c'est à dire $|z| << R$, on aura :

$$\vec{E}(M) \cong \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\vec{u}_z$$

C'est l'expression du champ créé en M par un plan (infini) uniformément chargé (chap III) :

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z & \text{du côté des z positifs} \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z & \text{du côté des z négatifs} \end{cases}$$

5-4 Conséquence

A la traversée du disque, le champ normal au disque subit une discontinuité égale à :

$$E_{z>0} - E_{z<0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Ce résultat est valable pour n'importe quelle distribution de charges en surface, uniforme ou non : si σ est la densité locale d'une distribution surfacique quelconque de charges, il y a en ce point un changement brutal (discontinuité égale à $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$) de la composante du champ électrostatique perpendiculaire à la surface.

6- Cylindre uniformément chargé en surface latérale avec une densité superficielle uniforme

6-1 Enoncé

Considérons un cylindre d'axe z'z et tel que l'origine O soit confondu avec son centre (figure 15). Ce cylindre est uniformément chargé sur sa surface latérale avec une densité superficielle uniforme $\sigma > 0$. Calculer le champ électrostatique en un point M de l'axe du cylindre.

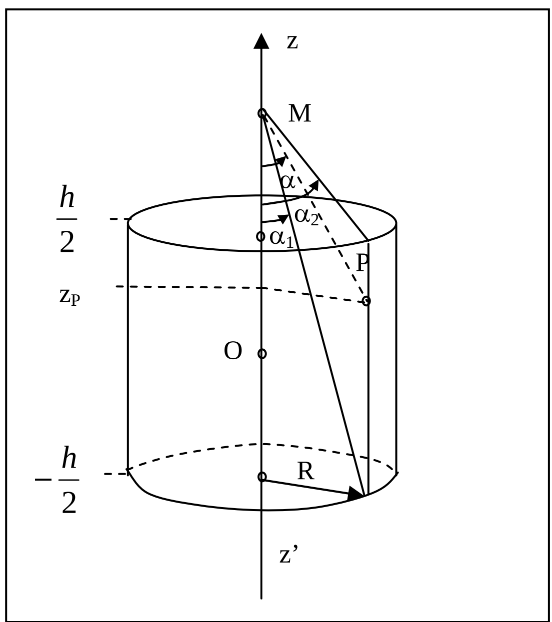


Figure 15

6-2 Solution

Un élément de charge dq porté par un élément de surface $dS_P = Rd\theta dz_P$, centré en P de cote z_P($-\frac{h}{2} \leq z_P \leq \frac{h}{2}$), crée en M un champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}$ s'écrivant (figure 16) :

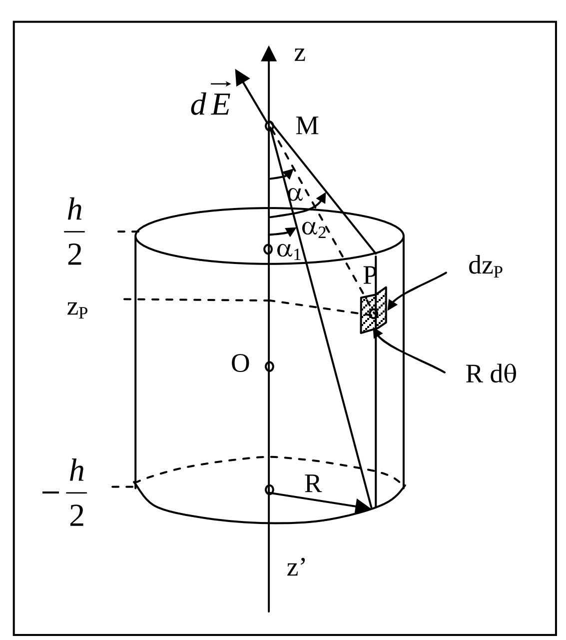


Figure 16

$$d\vec{E} = \frac{\sigma dS_P}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} = \frac{\sigma R}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{dz_P d\theta}{(R^2 + (z - z_P)^2)} \vec{u}$$

avec, $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}$

La symétrie de révolution par rapport à l'axe z'z impose que le champ $\vec{E}$ soit porté par cet axe :

$$d\vec{E}_z(M) = \frac{\sigma}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{dz_P d\theta}{(R^2 + (z - z_P)^2)} \cos\alpha \vec{u}_z$$

$$= \frac{\sigma R}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{(z - z_P) dz_P d\theta}{(R^2 + (z - z_P)^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma R}{4\Pi\varepsilon_0} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{(z - z_P)}{(R^2 + (z - z_P)^2)^{3/2}} dz_P (\int_0^{2\Pi} d\theta) \vec{u}_z$$

$$= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{(z - z_P)}{(R^2 + (z - z_P)^2)^{3/2}} dz_P \vec{u}_z$$

$$= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - z_P)^2}} \right]_{-h/2}^{+h/2} \vec{u}_z$$

soit,

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - h/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z + h/2)^2}} \right] \vec{u}_z$$

6-3 Cas limites

- Si le point M est très éloigné du cylindre ($|z| >> h, |z| >> R$), le champ $\vec{E}$ sera approximativement donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2(1-h/z)}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2(1+h/z)}}\right]\vec{u}_z$$

$$= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0|z|}\left[\left(1-\frac{h}{z}+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} - \left(1+\frac{h}{z}+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2}\right]\vec{u}_z$$

$$\cong \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0|z|}\left[1+\frac{h}{2z}-\frac{R^2}{2z^2}-1+\frac{h}{z}+\frac{R^2}{2z^2}\right]\vec{u}_z$$

$$\cong \frac{\sigma Rh}{2\varepsilon_0|z|z}\vec{u}_z$$

$$\cong \frac{\sigma 2\Pi Rh}{4\Pi\varepsilon_0 z^2}\frac{z}{|z|}\vec{u}_z$$

  C’est le champ équivalent à celui créé en M par une charge $Q = \sigma 2\Pi Rh$ concentrée en O.

- Si le point M est au centre géométrique O du cylindre (z = 0), ou encore si le cylindre est infiniment long (h >> z), $\vec{E} = \vec{0}$. Ce résultat est prévisible d’après la symétrie, par rapport à ce point, présenté par le cylindre chargé.

7- Sphère uniformément chargée en surface

7-1 Enoncé

Considérons une sphère de centre O, de rayon R et uniformément chargée en surface avec la densité superficielle σ (σ > 0). Choisissons le système d’axes (Oxyz) tel que l’axe Oz soit confondu avec (OM) (figure 17). Calculer le champ électrostatique en un point M de l’axe Oz.

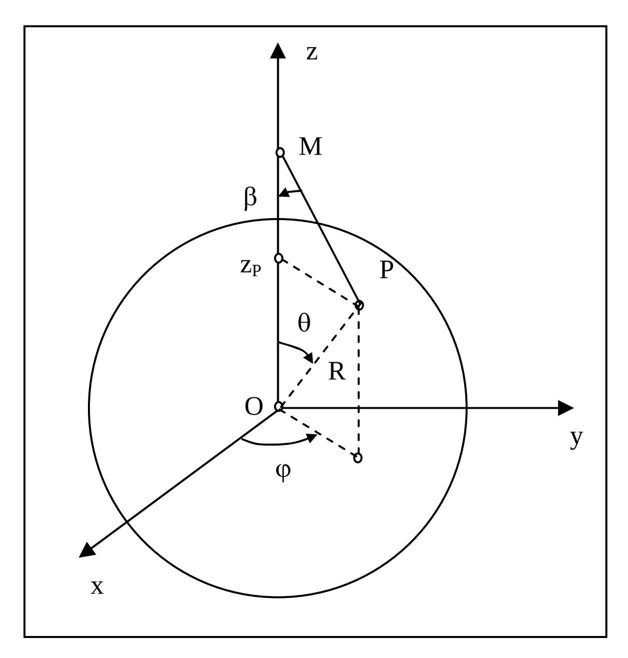


Figure 17

7-2 Solution

Dans ce cas, deux éléments de charges dq et dq' symétriques par rapport à l'axe z'z créent en M deux champs élémentaires dont la résultante est portée par cet axe (figure 18) : $\vec{E} = E_z \vec{k}$

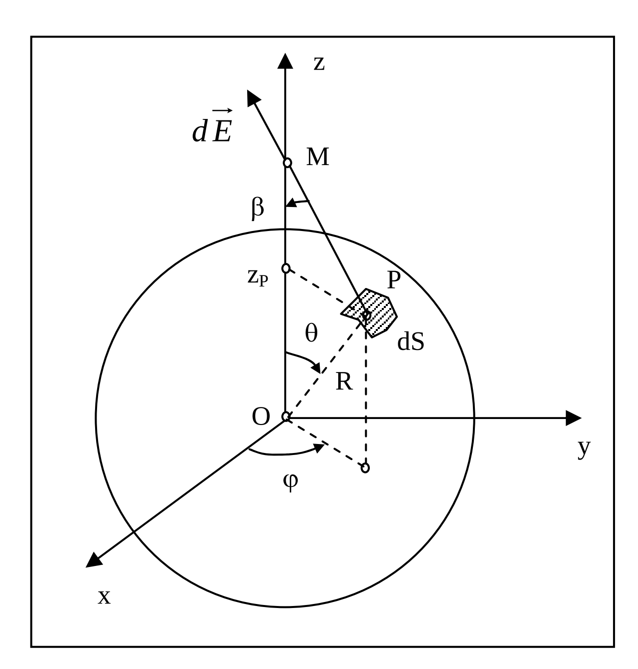


Figure 18

$$dE_z = dE\cos\beta = \frac{dq\cos\beta}{4\Pi\varepsilon_0\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2} = \frac{\sigma R^2\sin\theta d\theta d\varphi}{4\Pi\varepsilon_0\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}\cos\beta$$

d'autre part,

$$\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2 = z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta$$

$$R^2 = z^2 + \left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2 - 2z\left\|\overrightarrow{PM}\right\|\cos\theta$$

$$E_z = \frac{\sigma R^2 2\Pi}{8\Pi\varepsilon_0 z}\left((z^2 - R^2)\int_0^{\Pi}\frac{\sin\theta d\theta}{(z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta)^{3/2}} + \int_0^{\Pi}\frac{\sin\theta d\theta}{(z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta)^{1/2}}\right)$$

on a :

$$\int_0^{\Pi}\frac{\sin\theta d\theta}{(z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta)^{3/2}} = -\frac{1}{Rz}\left[\frac{1}{(z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta)^{1/2}}\right]_0^{\Pi} = -\frac{1}{Rz}\left(\frac{1}{|z+R|} - \frac{1}{|z-R|}\right)$$

$$\int_0^{\Pi}\frac{\sin\theta d\theta}{(z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta)^{1/2}} = \frac{1}{Rz}\left[(z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta)^{1/2}\right]_0^{\Pi} = \frac{1}{Rz}\left((z+R) - |z-R|\right)$$

Il résulte que :

$$E_z = \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0 z^2}\left(\frac{z^2 - R^2}{|z-R|} - \frac{z^2 - R^2}{z+R} + z + R - |z-R|\right)$$

$$= \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0 z^2}\left(\frac{z^2 - R^2}{|z-R|} + 2R - |z-R|\right)$$

- Si M est à l'intérieur de la sphère (z < R) : $E_z = 0$

- Si M est à l'extérieur de la sphère (z > R) : $E_z = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 z^2}$

On constate que le champ $\vec{E}$ est nul à l'intérieur de la sphère et qu'il présente une discontinuité égale à $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ à la traversée de la sphère chargée en surface. A l'extérieur de la sphère le champ est équivalent à celui créé en M par une charge $Q = \sigma 4\Pi R^2$ concentrée en O.

8- Calotte sphérique chargée uniformément en surface

8-1 Enoncé

On considère la surface (S) découpée sur une sphère de centre O et de rayon r par un cône de sommet O et de demi-angle au sommet θ_0 (calotte sphérique). Cette surface est uniformément chargée avec la densité surfacique $\sigma > 0$(figure 19).

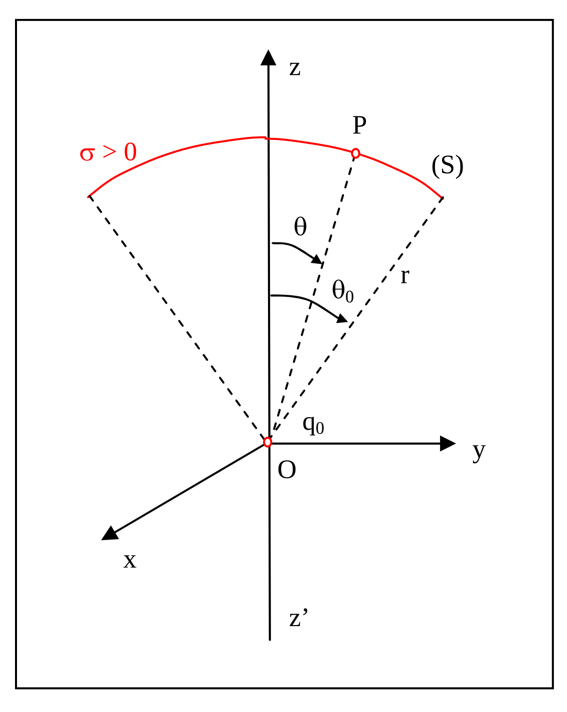


Figure 19

Calculer la charge totale Q portée par cette surface (S) et de déterminer la force électrostatique $\vec{F}$ qu'elle exerce sur une charge ponctuelle q_0 positive placée en O.

8-2 Solution

1) Charge totale d'une calotte sphérique chargée en surface

La charge totale Q de la répartition est donnée par :

$$Q = \iint_{(S)} dq = \iint_{(S)} \sigma dS$$

dS est exprimée en coordonnées sphériques

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$Q = \sigma \iint_{(S)} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \sigma r^2 \int_0^{\theta_0} \sin\theta d\theta \int_0^{2\Pi} d\varphi$$

Soit,

$$Q = 2\Pi\sigma r^2(1-\cos\theta_0)$$



2) Force exercée par la calotte chargée en surface sur une charge ponctuelle

La charge élémentaire $dq = \sigma dS$, portée par un élément de surface dS centré en P (figure 20) exerce sur la charge q_0 placée en O la force :

$$d\vec{F} = \frac{q_0 dq}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PO}}{\left\|\overrightarrow{PO}\right\|^3}$$

avec, $\left\|\overrightarrow{PO}\right\| = r$

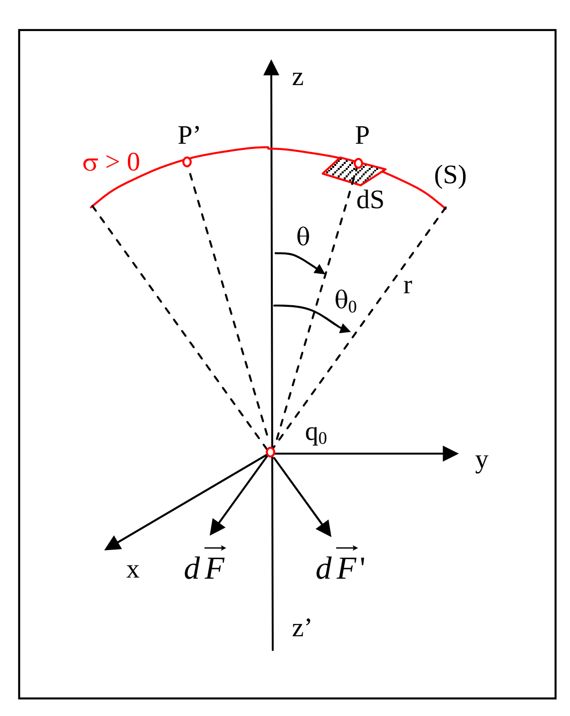


Figure 20

Un autre élément de charge dq' de point P', symétrique de P par rapport à l'axe z'z (axe de révolution), exerce sur q_0 une force élémentaire $d\vec{F}'$. La résultante des forces $d\vec{F}$ et $d\vec{F}'$ n'a de composante non nulle que suivant l'axe z'z. Donc, toutes les contributions des éléments de charge, constituent la charge totale de la surface (S) et considérés deux à deux, donnent une force totale $\vec{F}$ portée par l'axe z'z de vecteur unitaire $\vec{k}$.

$$\left\|d\vec{F}_z\right\| = \frac{q_0\sigma dS}{4\Pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

ainsi,

$$\left\|\vec{F}_z\right\| = \frac{q_0\sigma r^2}{4\Pi\varepsilon_0 r^2}\int_0^{\theta_0}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\Pi}d\varphi$$

$$\vec{F}_z = -\frac{q_0\sigma\sin^2\theta_0}{4\varepsilon_0}\vec{k}$$

ou encore :

$$\vec{F}_z = -\frac{q_0 Q\cos^2(\theta_0/2)}{4\Pi\varepsilon_0 r^2}\vec{k}$$

8-3 Remarques

1) la distribution de charges présente une symétrie de révolution d'axe z'z, donc tous les plans contenant cet axe sont de symétrie paire. $\vec{F}$ est alors contenue dans ces plans, c'est à dire portée par leur intersection : l'axe z'z.
2) Dans le cas d'une sphère uniformément chargée ($\theta_0 = \Pi$), la force exercée sur q_0 est nulle. En effet, la distribution de charges sur la sphère présente la symétrie sphérique par rapport au centre O. Donc les contributions de tous les éléments de charges, constituant la charge totale de la sphère et considérés deux à deux symétriquement par rapport à O (figure 21), s'annulent mutuellement et donnent ainsi une force totale nulle en O.

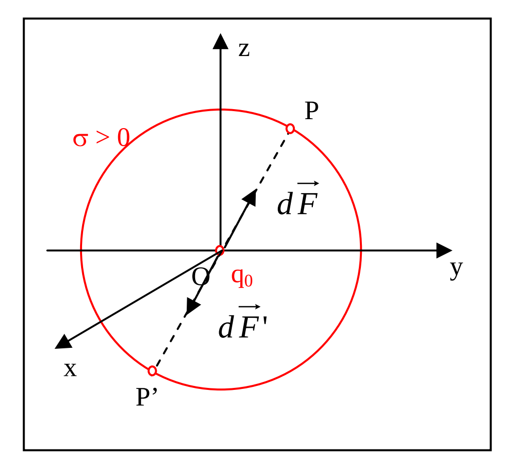


Figure 21

9- Répartition volumique de charges comprise entre deux calottes sphériques

9-1 Enoncé

Un cône découpe sur deux sphères, de même centre O et de rayon R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), deux calottes (S_1) et (S_2). Le volume délimité par (S_1) et (S_2) et le cône est uniformément chargé avec la densité volumique ρ positive (figure 22).

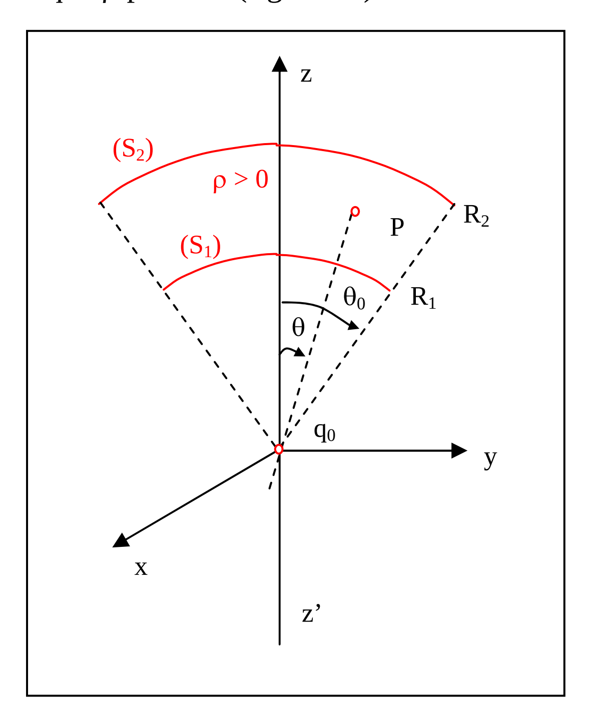


Figure 22

Calculer la charge totale Q portée par le volume considéré et déterminons la force électrostatique $\vec{F}$ qu'elle exerce sur une charge ponctuelle q_0 positive placée en O.

9-2 Solution

1) Charge totale comprise entre deux calottes sphériques chargées en volume

La charge totale Q de la répartition est donnée par :

$$Q = \iiint_{(\tau)} dq = \iiint_{(\tau)} \rho d\tau$$

dτ est exprimée en coordonnées sphériques

$$d\tau = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$Q = \rho \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int_0^{\theta_0} \sin\theta d\theta \int_0^{2\Pi} d\varphi$$

Soit,

$$Q = \frac{2\Pi}{3} \rho (R_2^3 - R_1^3)(1 - \cos\theta_0)$$

Là encore, d'après la symétrie de révolution autour de z'z, présentée par la charge répartie dans le volume considéré (figure 23), la force exercée sur q_0, placée en O, est portée par z'z :

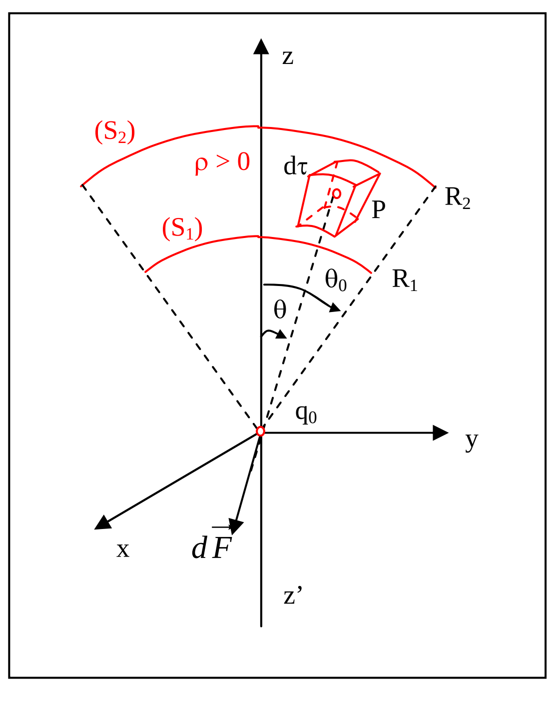


Figure 23

2) Force exercée par une répartition volumique de charge comprise entre deux calottes sphériques sur une charge ponctuelle

$$\left\| d\vec{F}_z \right\| = \frac{q_0 \rho d\tau}{4\Pi\varepsilon_0 r^2} \cos\theta$$

ainsi,

$$\left\| \vec{F}_z \right\| = \frac{q_0 \rho}{4\Pi\varepsilon_0 r^2} \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int_0^{\theta_0} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\Pi} d\varphi$$

soit,

$$\vec{F}_z = -\frac{q_0 \rho (R_2 - R_1) \sin^2\theta_0}{4\varepsilon_0} \vec{k}$$

ou encore :

$$\vec{F}_z = -\frac{3 q_0 Q}{4\Pi\varepsilon_0 (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)} \cos^2(\theta_0 / 2) \vec{k}$$

Remarquons de même que dans le cas d'une couche sphérique ($\theta_0 = \Pi$), le même type de raisonnement de symétrie que celui appliqué dans l'exemple précédent conduit à une force résultante nulle en O ($\vec{F}_z = \vec{0}$).

Calcul du champ et du potentiel électrostatique crées par une distribution continue de charges à partir du théorème de Gauss

1- Nappe chargée uniformément en surface

1-1 Enoncé

Considérons un plan **uniformément** avec une densité surfacique $\sigma > 0$ (nappe chargée) de dimension **infinie** et contenue dans le plan xOy. Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

1-2 Solution

a) Variable dont dépend $\vec{E}$ et sa direction

La nappe chargée en surface est contenue dans le plan (xOy) comme le montre la figure 1.

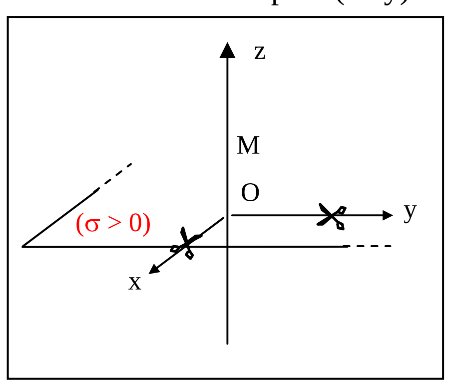


Figure 1

* La plan chargé est invariant par translations suivant Ox et Oy. Le système des coordonnées le plus adapté au calcul de $\vec{E}$ est le système cartésien de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le champ $\vec{E}$ est indépendant de x et y : $\vec{E}(M) = \vec{E}(\cancel{x}, \cancel{y}, z) = \vec{E}(z)$.

* Le plan $\Pi_1 = (M, \vec{j}, \vec{k})$ passant par M et perpendiculaire à (Ox) est un psp (plan de symétrie pair. $\vec{E} \in \Pi_1$ ainsi : $\vec{E} = \vec{E}_y + \vec{E}_z$

* Le plan $\Pi_2 = (M, \vec{i}, \vec{k})$ passant par M et perpendiculaire à (Oy) est un psp (plan de symétrie pair. $\vec{E} \in \Pi_2$ ainsi : $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_z$

Ainsi, $\vec{E} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$

D'où :

$$\vec{E} = E(z)\vec{k}$$

De plus, le plan chargé xOy étant un **plan de symétrie paire**, le champ $\vec{E}$ en un point M' symétrique de M par rapport à ce plan est :

$\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$ avec, $\vec{E}(M') = \vec{E}(-z) = E(-z)\vec{k}$ et $\vec{E}(M) = \vec{E}(z) = E(z)\vec{k}$

Ainsi, $E(-z) = -E(z)$

b) Calcul du champ électrostatique $\vec{E}(M)$

Tenant compte de la **symétrie** de la distribution plane de charge, nous choisissons comme surface fermée Σ le **parallélépipède droit**, dont les génératrices sont **normales** au plan chargé, fermé par **deux sections droites** notées Σ_1 et Σ_2 d'aire S, passant respectivement par M(x, y, z) et par M'(x, y, -z) le symétrique de M par rapport au plan xOy (figure 2).

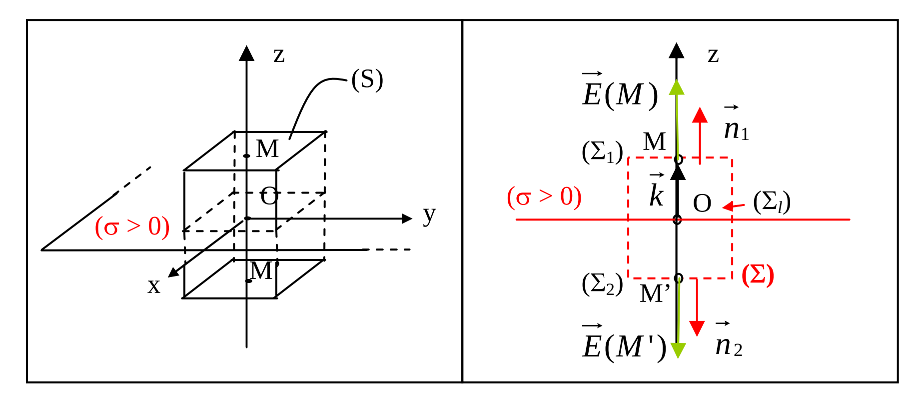


Figure 2

Le flux $\vec{E}$ sortant de la surface **latérale** Σ_l du cylindre est **nul**, car en tout point de Σ_l, $\vec{E}.d\vec{\Sigma}_l = 0$

Le flux sortant de Σ se réduit au flux sortant de Σ_1 et Σ_2 :

$$\Phi = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}.d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E}(M).d\vec{\Sigma}_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{E}(M').d\vec{\Sigma}_2$$

$$\Phi = E(z)(\vec{k}.\vec{n}_1)\iint_{\Sigma_1} d\vec{S}_1 + E(-z)(\vec{k}.\vec{n}_2)\iint_{\Sigma_2} d\vec{S}_2$$

Avec, $(\vec{k}.\vec{n}_1) = 1$; $(\vec{k}.\vec{n}_2) = -1$ et $\iint_{\Sigma_1} d\vec{S}_1 = \iint_{\Sigma_2} d\vec{S}_2 = S$

$$\Phi = [E(z) - E(-z)]S \quad \text{avec} \quad E(-z) = -E(z)$$

$$\Phi = 2E(z)S$$

La charge à l'intérieure de la surface de Gauss est :

$$Q_{\text{int}} = \iint_S \sigma d\vec{S} = \sigma\, S$$

D'après le théorème de Gauss :

$$2E(z)S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

D'où le champ $\vec{E}$

- pour z > 0 : $\vec{E} = +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$
- pour z < 0 : $\vec{E} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$

Ces deux résultats peuvent être **condensés** sous la forme :

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\vec{k} \quad (z \neq 0)$$

Ce résultat peut être retrouvé en choisissant comme surface de Gauss Σ la surface fermée formé par le **cylindre droit**, dont les génératrices sont **normales** au plan chargé, fermé par **deux sections droites** d'aire S, passant par M(x, y, z) et par M'(x, y, -z).

Le champ $\vec{E}$ change de sens à la traversée de la nappe chargée et subit une **discontinuité** égale à σ / ε_0 (figure 3).

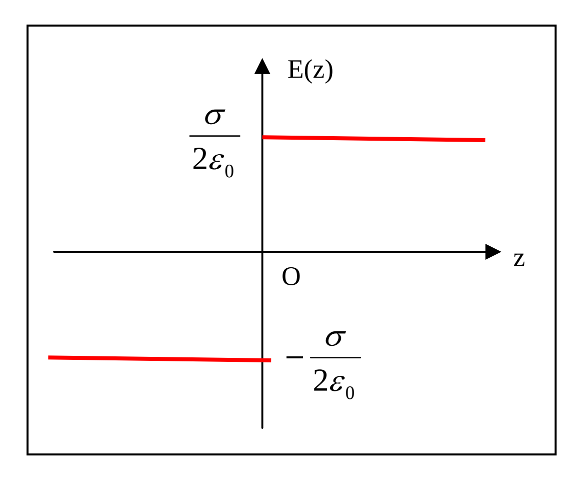


Figure 3

En réalité, il n'existe pas de distribution plane de dimensions **infinies**. Cependant, la distribution plane est considérée comme infinie si on ne considère que des points placés **loin des bords** de la distribution, c'est à dire des points dont la **distance** à la surface chargée est **petite par rapport aux dimensions de celle-ci**.

c) Calcul du potentiel électrostatique V(M)

En choisissant l'origine des potentiels dans le plan xOy : $V(z=0)=0$

$V(z)=\int_0^z dV=-\int_0^z \vec{E}.\vec{dl}$ avec, $\vec{dl}=dz\vec{k}$

Pour z > 0 ; $V(z)=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^z dz=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z$

Pour z < 0 ; $V(z)=+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^z dz=+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z$

Soit,

$V(z)=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z|$

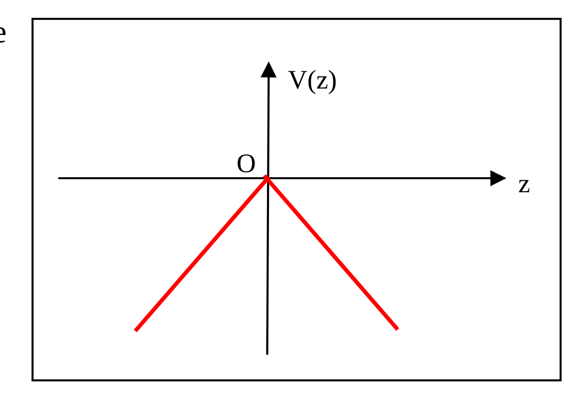


Figure 4

A la traversée du plan chargé, le potentiel y est **continu** (figure 4).

2- Cylindre chargé uniformément en surface

2-1 Enoncé

Soit un cylindre (C) d'axe $\overrightarrow{z'z}$, de rayon R, de longueur **infinie**, uniformément chargé avec une densité surfacique de charge σ > 0. Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

2-2 Solution

a) Variable dont dépend $\vec{E}$ et sa direction

* Le cylindre chargé a un axe de révolution Oz (figure 5). Le système de coordonnées le plus adapté est le système cylindrique de base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$. Cette distribution de charge est invariante par translation suivant Oz et par rotation d'angle θ autour de Oz.

$\vec{E}(M)=\vec{E}(r,\theta,\not{z})=\vec{E}(r)$

* Le plan $\Pi_1=(M,\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ passant par M et l'axe (Oz) est un psp (plan de symétrie pair. $\vec{E}\in\Pi_1$ ainsi : $\vec{E}=\vec{E}_r+\vec{E}_z$

* Le plan $\Pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ passant par M et perpendiculaire à (Oz) est un psp (plan de symétrie pair. $\vec{E} \in \Pi_2$ ainsi : $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$

Ainsi, $\vec{E} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$

D'où, le champ est radial :

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$

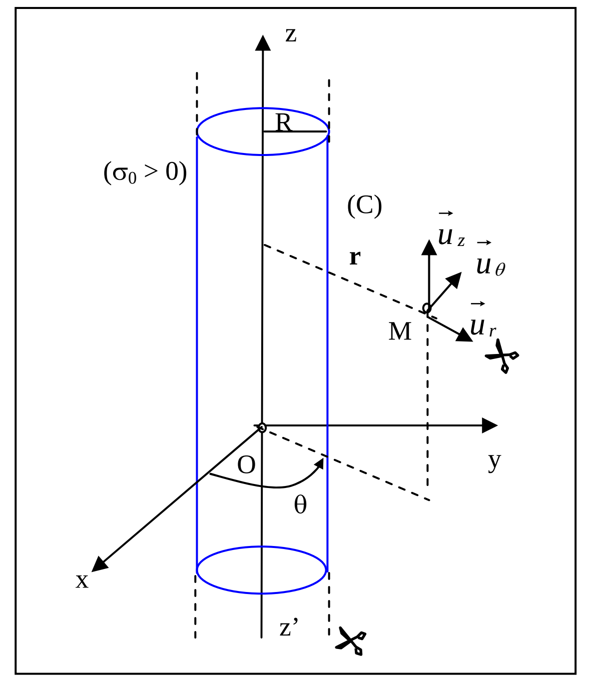


Figure 5

Le système possède une symétrie de **<u>révolution</u>** par rapport à l'axe $\overrightarrow{z'z}$ et de **<u>translation</u>** parallèlement à cet axe : le champ $\vec{E}$ en un point M situé à la distance r de l'axe est donc de la forme :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$$

<u>a) Calcul du champ électrostatique $\vec{E}(M)$</u>

La surface fermée Σ que nous choisissons pour calculer le flux de $\vec{E}$ est une surface de même type que la surface chargée constitué d'un cylindre d'axe $\overrightarrow{z'z}$, de rayon r, de hauteur h (figure 6).

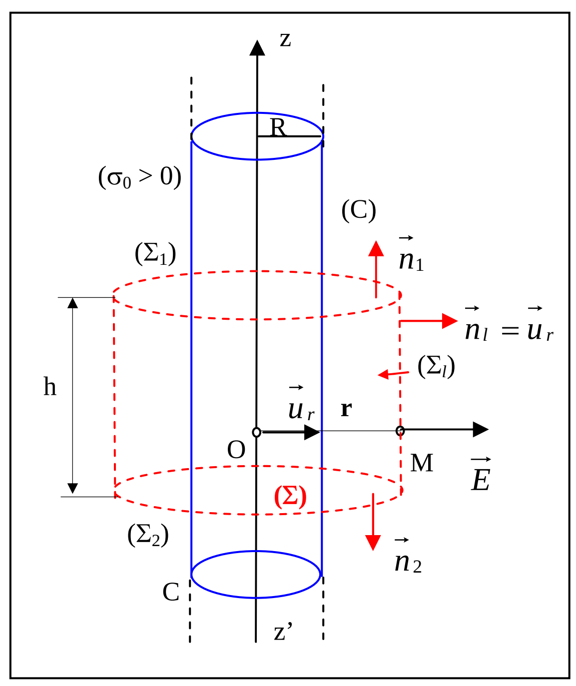


Figure 6

Le flux de $\vec{E}$ à travers la surface de Gauss s'écrit :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}.d\vec{\Sigma} \text{ avec, } d\vec{\Sigma}_l = rd\theta dz\vec{u}_r \text{ et } d\vec{\Sigma}_1 = d\vec{\Sigma}_1 = rdrd\theta\vec{k}_r$$

$$\Phi = \iint_{\Sigma_1} \vec{E}.d\vec{\Sigma}_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{E}.d\vec{\Sigma}_2 + \iint_{\Sigma_l} \vec{E}.d\vec{\Sigma}_l$$

Le flux de $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ à travers les surfaces **planes** Σ_1 et Σ_2 étant **nul** (en tout point de ces surfaces, on a $\vec{E}(r) \perp \vec{n}_1$ et $\vec{E}(r) \perp \vec{n}_2$). Le flux sortant de Σ se réduit à :

$$\Phi = \iint_{\Sigma_1} (E(r)\vec{u}_r).d\vec{\Sigma}_l \text{ avec, } d\vec{\Sigma}_l = rd\theta dz\vec{u}_r$$

avec, Σ_1 : surface latérale de Σ

Puisque E(r) et r sont des constantes, on a :

$$\Phi = E(r)r\int_0^{2\Pi} d\theta \int_0^h dz = 2\Pi rhE(r)$$

Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\phi = 2\Pi rhE(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

<u>* Si M est **extérieur** au cylindre chargé (C) : r > R</u>

La charge à l'intérieur du cylindre Σ de rayon r > R :

$$Q_{\text{int}} = \iint_S \sigma dS \text{ avec, } dS = Rd\theta dz$$

Puisque σ est uniforme, on a :

$$Q_{\text{int}} = \sigma R\int_0^{2\Pi} d\theta \int_0^h dz = 2\Pi Rh\sigma \quad \text{(surface latérale * }\sigma\text{)}$$

Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$\phi = 2\Pi rhE(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} 2\Pi Rh\sigma$$

En simplifiant par (2 Π h), la norme du champ électrostatique E(r) :

$$E(r > R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Par raison de symétrie, on sait que $\vec{E}(M)$ est porté par $\vec{u}_r$. On obtient finalement :

$$\vec{E}(r > R) = \frac{\sigma_0 R}{\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_r}{r} \qquad (3\text{-}19)$$

<u>* Si M est intérieur au cylindre chargé (C) : r < R</u>

Dans ce cas, la charge à l'intérieur du cylindre Σ de rayon r < R étant **nulle**,

$Q_{\text{int}} = 0$

Il s'ensuit, d'après le théorème de Gauss, que la norme du champ est nulle :

$E(r) = 0$

Ce qui conduit à :

$\vec{E}(r < R) = \vec{0}$

Le champ $\vec{E}$ normal à la surface chargée, subit une **<u>discontinuité</u>** égale à σ_0 / ε_0 (figure 7).

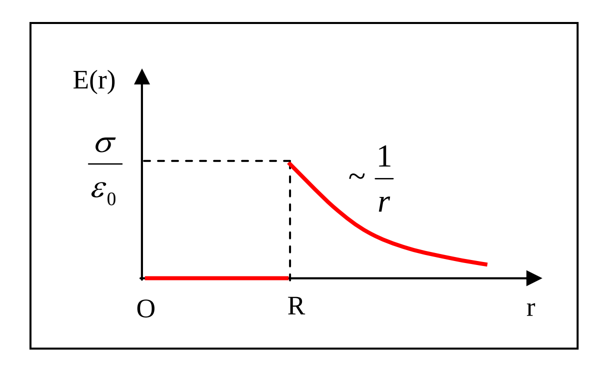


Figure 7

b) Calcul du potentiel électrostatique V(M)

$V(r) = -\int \vec{E}.d\vec{l}$ avec, $d\vec{l} = dr\vec{u}_r$

D'où :

$V(r) = -\int E(r)dr$

* Si M est à l'extérieur du cylindre : r ≥ R

$V(r) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r} = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} Logr + cste$

Dans le cas d'une distribution surfacique portée par le cylindre infiniment long, on prendra l'origine des potentiels, à une distance finie r_0 de l'axe du cylindre (par exemple $r_0 > R$; $V(r_0) = 0$)

$V(r = r_0) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} Logr_0 + cste = 0$

$cste = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} Logr_0$

$V(r \geq R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} Log\frac{r_0}{r}$

* Si M est à l'intérieur du cylindre : r ≤ R

$V(r \leq) = cste$

La constante est déterminée par continuité du potentiel en r=R :

$V(r \geq R)_{r=R} = V(r \leq R)_{r=R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} Log\frac{r_0}{R}$

3- Sphère chargée uniformément en surface

3-1 Enoncé

On considère une sphère (S) de centre O et de rayon R, chargée en surface de densité surfacique de charge σ uniforme. Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

3-2 Solution

a) Variable dont dépend $\vec{E}$ et sa direction

* La sphère chargée est invariante par double rotation l'une d'angle θ autour de $\vec{u}_z$ et l'autre d'angle φ autour de $\vec{u}_\varphi$: on dit que la sphère a le point O comme centre de symétrie (figure 8). Le système de coordonnées le plus adapté est le système sphériques de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

$\vec{E}(M) = \vec{E}(r,\theta,\varphi) = \vec{E}(r)$

* Le plan méridien $\Pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un psp (plan de symétrie pair. $\vec{E} \in \Pi_1$ ainsi : $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$

* Le plan $\Pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ passant par M et perpendiculaire à (Oz) est un psp (plan de symétrie pair. $\vec{E} \in \Pi_2$ ainsi : $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$

Ainsi, $\vec{E} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$

D'où, le champ est radial :

Figure 8

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$

avec $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$

Le champ $\vec{E}$ créé par cette distribution à **symétrie sphérique**, en un point M est porté par le vecteur $\vec{u}_r$ et ne dépend que de la variable d'espace $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$.

b) Calcul du champ électrostatique $\vec{E}(M)$

La surface fermée Σ que nous choisissons pour calculer le flux de $\vec{E}$ est une sphère de centre O, de rayon r : surface de même type que la surface chargée (figure 9). Le flux de $\vec{E}$ à travers Σ est donné par :

$$\Phi = \oiint_\Sigma \vec{E}.d\vec{\Sigma}$$

avec, $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ et $d\vec{\Sigma} = d\Sigma\vec{u}_r = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \vec{u}_r$

Le champ $\vec{E}$ est en tout point de Σ porté par la normale « sortante » $\vec{u}_r$ et sa norme est **constante** en tout point de Σ.

$$\Phi = E(r)r^2 \int_0^\Pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\Pi} d\varphi = 2\Pi E(r) r^2 [-\cos\theta]_0^\Pi$$

$$= 4\Pi r^2 E(r)$$

Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\Phi = 4\Pi r^2 E(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

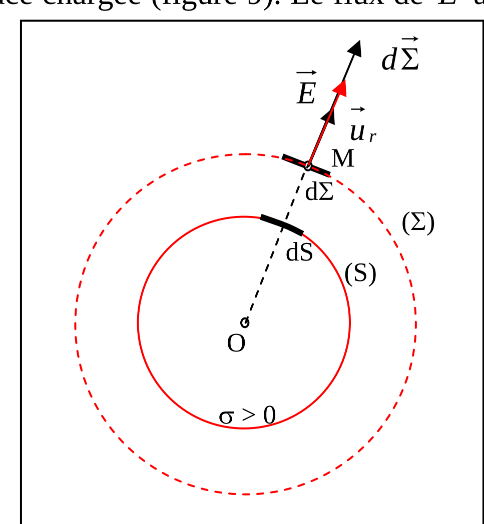


Figure 9

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss Σ dépend de la position de M. Deux cas peuvent être distingués : M est extérieur à la sphère chargé (S) ou M est intérieur à (S).

<u>* M est extérieur à (S) : r > R</u>

La charge à l'intérieur de la sphère Σ de rayon r > R est :

$$Q_{int} = \iint_S \sigma\, dS \quad \text{avec,} \quad dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

Puisque σ est uniforme, on a :

$$Q_{int} = \sigma R^2 \int_0^{\Pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\Pi} d\varphi = 4\Pi R^2 \sigma \quad \text{(surface d'une sphère*σ)}$$

Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$\Phi = 4\Pi r^2 E(r) = \frac{4\Pi R^2 \sigma}{\varepsilon_0}$$

En simplifiant par (4 Π), la norme du champ s'écrit :

$$E(r > R) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Par raison de symétrie, le champ $\vec{E}(M)$ est porté par $\vec{u}_r$. On obtient finalement :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r > R) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} \qquad (3\text{-}14)$$

si on pose : $Q = \iint_S \sigma\, dS = 4\Pi R^2 \sigma$

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

Le champ est <u>**identique**</u> au champ créé en M par une charge **ponctuelle** égale à la charge totale de la sphère, Q concentrée en O.

<u>* M est intérieur à (S) : r < R</u>

Dans ce cas, la charge à l'intérieur de la sphère de rayon r < R est nulle :

$$Q_{int} = 0$$

Le théorème de Gauss conduit à :

$$\Phi = 4\Pi r^2 E(r) = 0$$

Ainsi, la norme de champ est nulle :

$$E(r < R) = 0$$

Ce qui implique que :

$$\vec{E}(r < R) = \vec{0}$$

Le champ électrostatique E(r) subit à la traversée de la surface chargée une <u>**discontinuité**</u> égale à σ / ε_0 (figure 10).

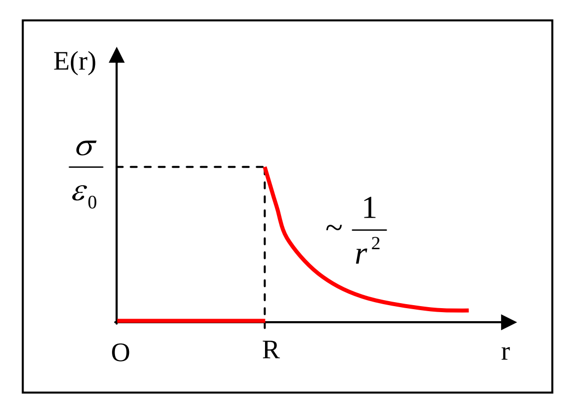


Figure 10

c) Calcul du potentiel électrostatique V(M)

$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r = -\overrightarrow{grad}V(M)$

Ce qui donne en projetant sur $\vec{u}_r$:

$$E(r) = \vec{E}.\vec{u}_r = -\frac{dV}{dr}$$

D'où,

$$V(M) = -\int E(r)dr$$

* M est extérieur à (S) : r ≥ R

Le potentiel en M est :

$$V(M) = -\int E(r)dr = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} + cste$$

En choisissant **l'origine** des potentiels à l'infini ($V(r = \infty) = 0$), on obtient :

$$V(M) = V(r \geq R) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\Pi\varepsilon_0 r}$$

Le potentiel est **identique** au potentiel créé en M par une charge **ponctuelle** égale à la charge totale de la sphère, Q.

* M est intérieur à (S) : r ≤ R

Le champ en tout point **intérieur** à S est **nul** ; le potentiel est donc constant :

$V(r \leq R) = cste$

Pour déterminer la constante nous pouvons utiliser la **continuité** du potentiel pour r = R :

$$V(r \leq R)_{r=R} = V(r \geq R)_{r=R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

Nous pouvons retrouver cette **constante** en écrivant :

$V(r \leq R) = V(r = 0)$

avec, V(r=0) est le potentiel **au centre O** de la sphère S obtenu à partir d'un calcul direct suivant la relation : $dV = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$ avec, $r = \left\|\overrightarrow{PM}\right\| = R$:

$$V(r \leq R) = V(r = 0) = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma\, dS}{R} = \frac{\sigma}{4\Pi\varepsilon_0 R}\iint_S dS = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

Alors que le champ est discontinu à la traversée de la charge (figure 10), le potentiel électrostatique est **continu** (figure 11).

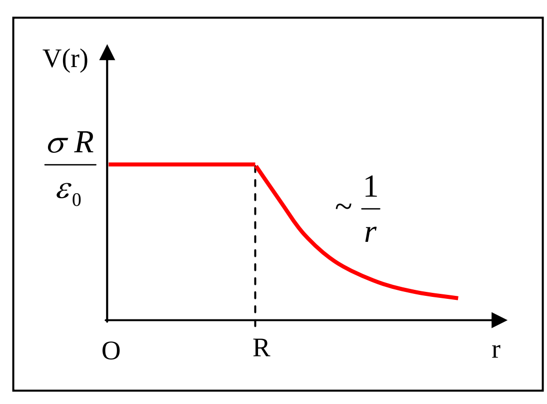


Figure 11

4- Sphère chargée uniformément en volume

4-1 Enoncé

On considère une sphère (S) de centre O et de rayon R, chargée en surface de densité volumique de charge ρ uniforme. Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

4-2 Solution

a) Variable dont dépend $\vec{E}$ et sa direction

Les mêmes considérations de symétrie évoquées précédemment suggèrent que :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$$

b) Calcul du champ électrostatique $\vec{E}(M)$

Pour une sphère fermé Σ de centre O et de rayon r, le flux sortant est :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}.d\vec{\Sigma} \text{ avec, } d\Sigma = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

Puisque le norme du champ est constant, le théorème de Gauss s'écrit :

$$\Phi = 4\Pi r^2 E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

* M est extérieur à (S) : r ≥ R

La charge volumique à l'intérieur d'une sphère de rayon r ≥ R est donnée par :

$$Q = \iiint_{v} \rho\, d\tau \text{ avec, } d\tau = R^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$Q = \rho R^2 \int_0^R dr \int_0^{\Pi} \sin\theta \int_0^{2\Pi} d\varphi = \frac{4}{3}\Pi R^3 \rho$$

Le théorème de Gauss donne :

$$\Phi = 4\Pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\Pi R^3 \rho$$

En simplifiant par (4 Π), on a :

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

Le champ électrostatique est porté par $\vec{u}_r$ et on a :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_r}{r^2} = \frac{Q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

* M est intérieur à (S) : r ≤ R

La charge volumique à l'intérieur d'une sphère de rayon r ≥ R est donnée par :

$$Q = \iiint_{v} \rho\, d\tau \text{ avec, } d\tau = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$Q = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^{\Pi} \sin\theta \int_0^{2\Pi} d\varphi = \frac{4}{3}\Pi r^3 \rho$$

Le théorème de Gauss donne :

$$\Phi = 4\Pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\Pi r^3 \rho$$

En simplifiant par (4 Π r^2), on a :

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

Le champ électrostatique est porté par $\vec{u}_r$ et on a :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r \le R) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\,\vec{u}_r = \frac{Q}{4\Pi\varepsilon_0 R^3} r\,\vec{u}_r$$

Remarquons que pour r ≥ R, le champ est le même que si la charge $Q = \rho \frac{4}{3}\Pi R^3$ était concentrée au centre de la sphère O (figure 12).

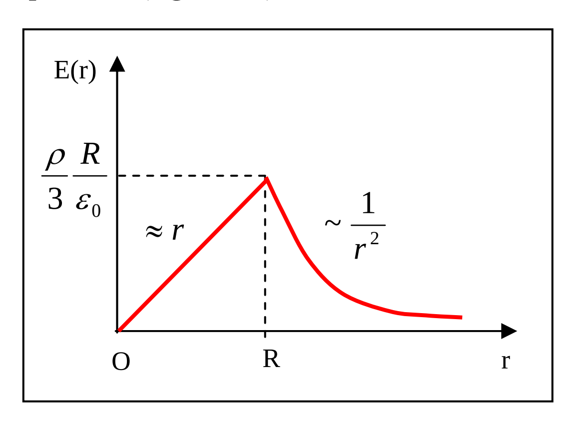


Figure 12

c) Calcul du potentiel électrostatique V(M)

$$V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}.d\vec{l}$$

* M est extérieur à (S) : r ≥ R

$$V(M) = V(r \ge R) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}_e.d\vec{l} = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2}\vec{u}_r.dr\vec{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

* M est intérieur à (S) : r ≤ R

$$V(M) = V(r \le R) = -\int \vec{E}_i.d\vec{l} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r\vec{u}_r.dr\vec{u}_r = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^2}{2} + cste$$

Pour déterminer la constante nous pouvons utiliser la **continuité** du potentiel pour r = R :

$$V(r \ge R)_{r=R} = V(r \le R)_{r=R} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} R^2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^2}{2} + cste$$

Ce qui donne :

$$cste = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(R^2 + \frac{R^2}{2}) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2$$

d'où,

$$V(M) = V(r \le R) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2 = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$$

Ainsi pour $r \ge R$, le champ et le potentiel sont les mêmes que si toute la charge Q était concentrée en O (figure 13).

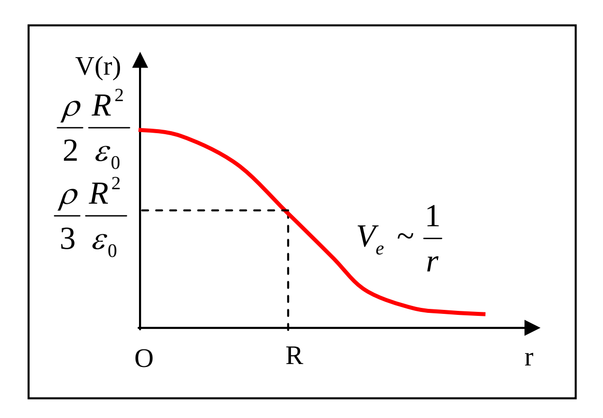
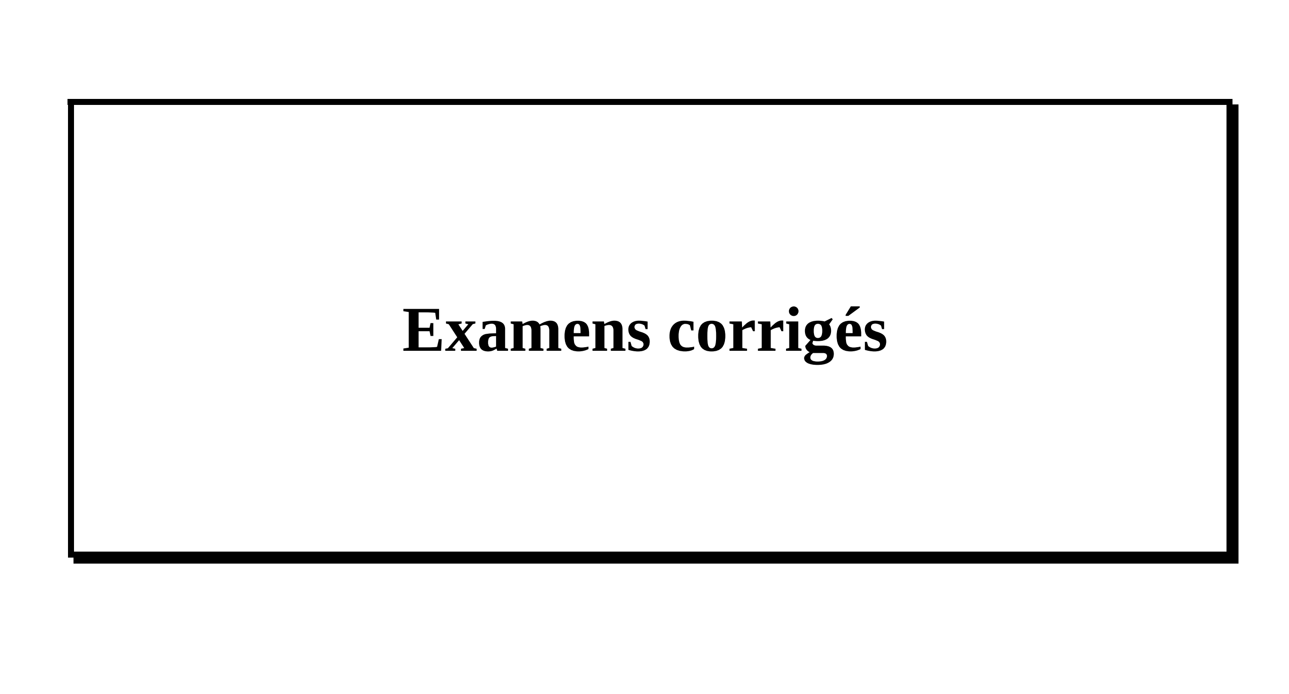


Figure 13

4-3 Remarque

Le potentiel pour un point M à l'intérieur à Σ peut être également déterminé en écrivant :

$$V(r \leq R) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}.d\vec{l} = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}_e.d\vec{l} - \int_{R}^{r} \vec{E}_i.d\vec{l} \text{ avec, } \vec{E}_e = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\vec{u}_r \text{ et } \vec{E}_i = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\,\vec{u}_r$$


Examens corrigés

E.S.S.T.T
Département de Physique
et de chimie
TC1

Novembre 2003
Durée 1H30

Devoir surveillé N°1
Physique Electricité

Exercice 1 : Les parties I, II et III sont indépendantes

Partie I

On considère une charge ponctuelle q placée dans le vide à l'origine O du système de coordonnées sphériques de base ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$).

1) Donner l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ crée par cette charge en un point M de l'espace situé à la distance r de O. Exprimer $\vec{E}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

2) Calculer la circulation de $\vec{E}$ le long d'un contour quelconque limité par deux points A et B. Soit V(M) le potentiel électrostatique crée en M par la charge q. En déduire la différence de potentiel $V_A - V_B$ entre A et B, puis le circulation de $\vec{E}$ le long d'un contour fermé.

Partie II

On considère deux charges ponctuelles identiques (q > 0) distantes de 2a et placées dans le vide en deux points A(0, a, 0) et B(0, -a, 0) de l'axe $\overrightarrow{Oy}$.

1) Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ crée par ces deux charge en un point M de la médiatrice de AB. On note O le milieu de AB et on pose : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i}$.

2) Que devient l'expression de $\vec{E}(M)$ lorsqu'on remplace la charge q en A par –q.

Partie III

Soit un fil AB de longueur L confondu avec l'axe Oz, chargé avec une densité linéique λ uniforme.

1) Calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ crée par ce fil en un point M de la médiatrice de AB. On note O le milieu de AB et on pose : OM = r. Ecrire $\vec{E}$ en fonction de la charge totale Q du fil.
2) En déduire le champ $\vec{E}$ crée par un fil infini.
3) Calculer, à une constante près, le potentiel électrostatique V crée par le fil infini. En déduire la différence de potentiel entre deux points M_1 et M_2 de la médiatrice de AB.

Exercice 2 : Les parties I et II sont indépendantes

Dans l'espace assimilé au vide, la plan Π (xOy) d'un repère orthonormé direct de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ porte une charge de densité surfacique σ > 0. Le champ électrostatique crée par cette distribution en tout point M de l'espace est :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{E}(z > 0) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} \\ \vec{E}(z < 0) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} \end{cases}$$

Partie I

1) Calculer le potentiel électrostatique V(M) dans les deux régions z > 0 et z < 0. On donne : $V(z=0)=0$.
2) On superpose au plan précédent à la distance z = d > 0, un plan Π1 uniformément chargé avec une densité (-σ).
   a) En utilisant le principe de superposition, déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ dans les trois régions : z > d, 0 < z < d et z < 0.
   b) En déduire le potentiel électrostatique V(M) dans les trois régions : z ≥ d, 0 ≤ z ≤ d et z ≤ 0. On donne : $V(z=0)=0$.
3) Représenter E(M) et V(M) en fonction de z. Commenter ces courbes.

Partie II

A la distance z = d > 0, le plan Π_1 est remplacé par une demi-sphère de rayon R qui pose sur un disque de même rayon E et d'épaisseur très faible. La demi-sphère et le disque ne porte aucune charge (figure 1).

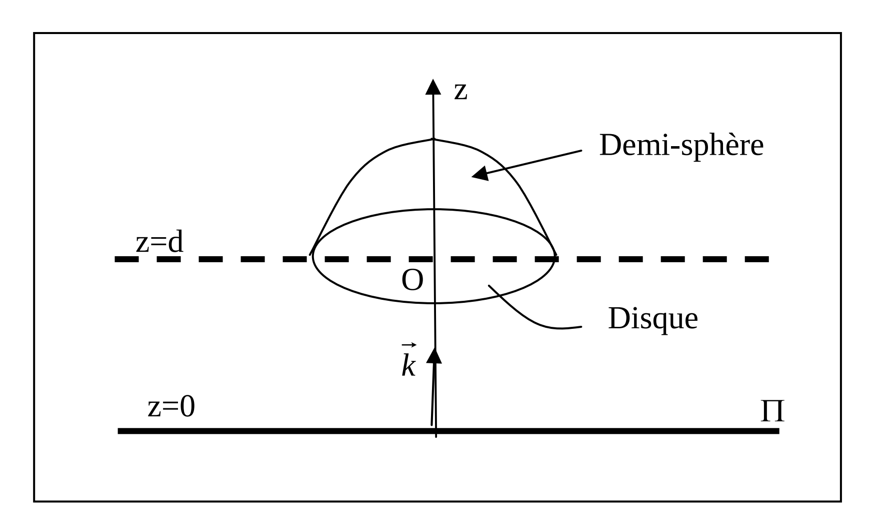


Figure 1

Calculer le flux Φ du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ crée par le plan Π à travers la surface fermée formée par la demi-sphère et le disque.

Correction DS ESSTT 2003

Exercice 1

Partie I

1) En coordonnées sphériques (r, θ, φ) de base ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$), le champ est donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

2) $C(\vec{E}) = \int_{AB} \vec{E}.d\vec{r}$

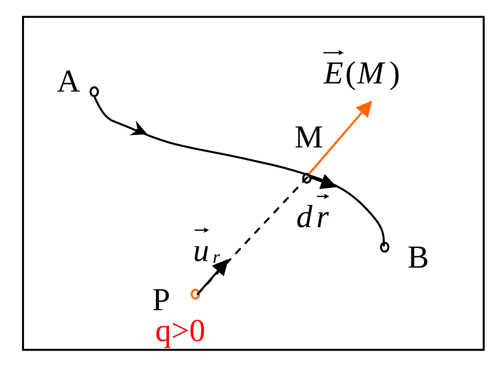


Figure 2

$$d\vec{r} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

$$C(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

D'autre part,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

$$dV(r) = -Edr$$

$$\int_A^B dV = -\int_A^B Edr = -C(\vec{E})$$

$$V_B - V_A = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Ainsi,

$$V_A - V_B = C(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Pour un contour fermé $\Gamma = ABA$

$$C(\vec{E}) = \oint_\Gamma \vec{E}.d\vec{r} = \oint_{AB}\vec{E}.d\vec{r} + \oint_{BA}\vec{E}.d\vec{r} = (V_A - V_B) + (V_B - V_A) = 0$$

Partie II

1) $\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M)$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{AM}}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^3} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{BM}}{\left\|\overrightarrow{BM}\right\|^3}$$

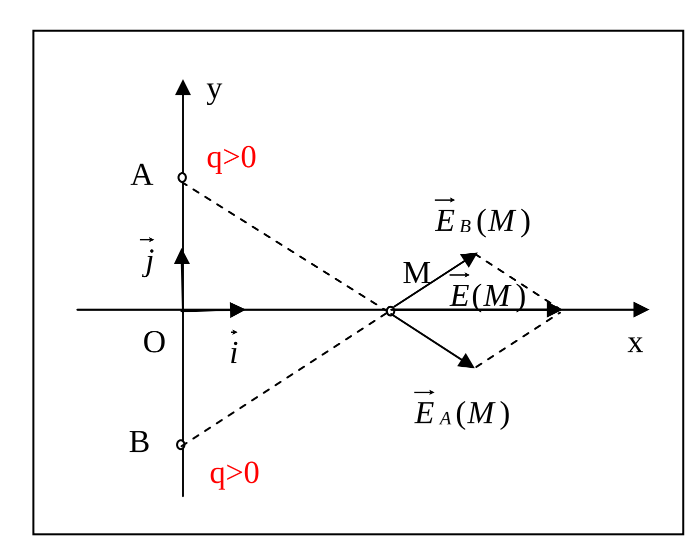


Figure 3

Or, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = -a\vec{j} + x\vec{i}$

et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM} = a\vec{j} + x\vec{i}$

Donc,

$$\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \left\|\overrightarrow{BM}\right\| = (a^2 + x^2)^{1/2}$$

Et donc,

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}\vec{i}$$

2) On remplace la charge q en A par (-q) :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M)$$
$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{AM}}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^3} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{BM}}{\left\|\overrightarrow{BM}\right\|^3}$$

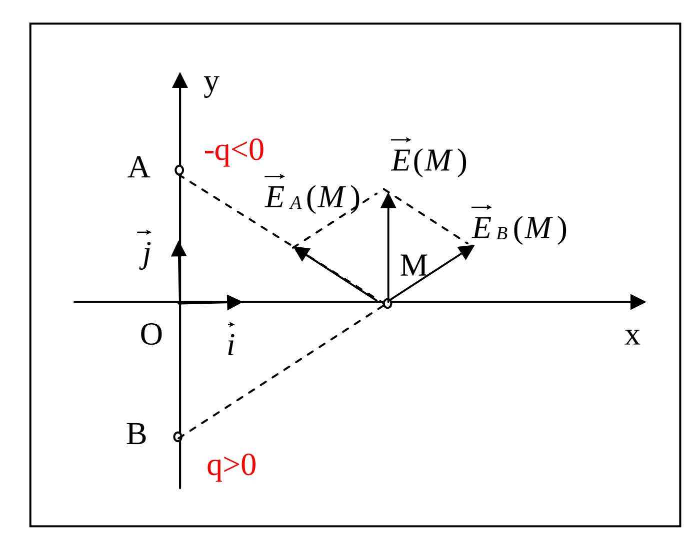


Figure 4

Et donc,

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}(-\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM})$$
$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{(a^2+x^2)^{3/2}}\vec{j}$$

Partie III

1) Soient deux points P et P' symétrique par rapport à O. Autour de P et P', un élément d*l* contient une charge $dq = \lambda dl = \lambda dz$.

* La charge élémentaire $dq(P)$ crée le champ élémentaire $d\vec{E}_P(M)$

* La charge élémentaire $dq(P')$ crée le champ élémentaire $d\vec{E}_{P'}(M)$

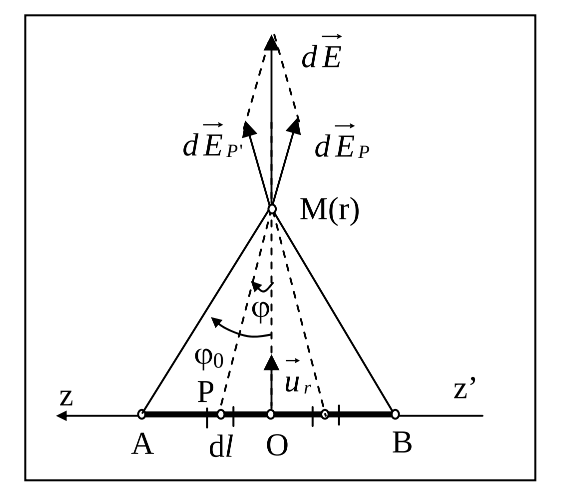


Figure 5

Le champ crée par les deux éléments symétriques a une seule composante suivant $\vec{u}_r$ puisque les composantes suivant z'z se compensent.

D'autre part, $\left\|d\vec{E}_P(M)\right\| = \left\|d\vec{E}_{P'}(M)\right\|$

Donc,

$$d\vec{E}(M) = d\vec{E}_P(M) + d\vec{E}_{P'}(M) = 2\left\|d\vec{E}_P(M)\right\|\cos\varphi\,\vec{u}_r$$
$$d\vec{E}(M) = 2\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}\cos\varphi\,\vec{u}_r$$

avec, $tg\varphi = \dfrac{z}{r}$

$$dz = r(1+tg^2\varphi)d\varphi = \frac{r}{\cos^2\varphi}d\varphi$$

$$\frac{1}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2} = \frac{\cos^2\varphi}{r^2}$$

Soit,

$$d\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cos\varphi d\varphi \vec{u}_r$$

Le champ total est :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{\varphi_0}\cos\varphi d\varphi \vec{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}[\sin\varphi]_0^{\varphi_0}\vec{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\sin\varphi_0 \vec{u}_r$$

Avec, $\sin\varphi_0 = \frac{L/2}{\left[(L/2)^2 + r^2\right]^{1/2}}$

* La charge totale du fil est : $Q = \int_{fil}\lambda dl = \int_{-L/2}^{L/2}\lambda dl = \lambda L$ et donc : $\lambda = \frac{Q}{L}$. Le champ peut s'exprimer en fonction de la charge totale :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rL}\sin\varphi_0 \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{1}{\left[(L/2)^2 + r^2\right]^{1/2}}\vec{u}_r$$

2) Fil infini : $\varphi_0 \to \frac{\Pi}{2}$; $\sin\varphi_0 = 1$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$

Rq. On peut retrouver ce résultat, en écrivant le champ dans le cas où $r << L/2$:

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{L/2}{L/2\left[1+(r/(L/2))^2\right]^{1/2}}\vec{u}_r \cong \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$

3) V pour un fil infini :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

$$dV(r) = -Edr$$

$$V = -\int Edr = -\frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0}Logr + cste$$

$$-dV = +Edr$$

$$-\int_{M_1}^{M_2}dV = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0}\int_{M_1}^{M_2}\frac{dr}{r}$$

Ainsi,

$$V(M_1) - V(M_2) = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0}Log\frac{r_2}{r_1}$$

Exercice 2

Partie I

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\dfrac{dV}{dz}\vec{k}$

$V = -\int E dz$

* Pour z > 0

$V = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int dz = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}z + C_1$

* Pour z = 0

$V(z=0) = C_1$

$V(z>0) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}z$

* Pour z < 0

$V = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int dz = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}z + C_2$

* Pour z = 0

$V(z=0) = C_2$

$V(z<0) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}z$

Ainsi,

$V(z) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z|$ pour tout z réel.

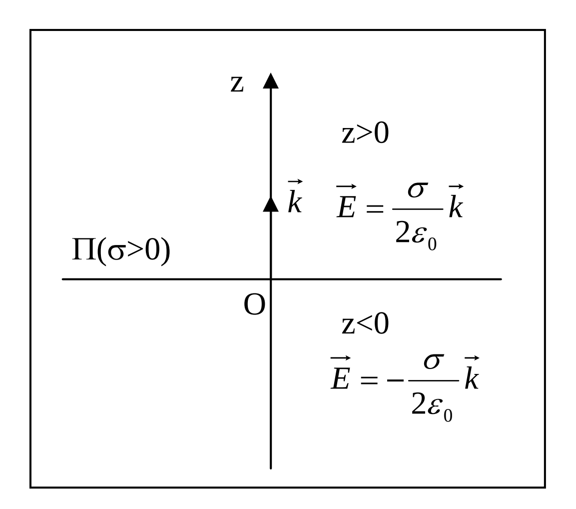


Figure 6

2) Superposition

* Pour Π, on a : $\begin{cases} \vec{E}(z>0) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} \\ \vec{E}(z<0) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} \end{cases}$

* Pour Π_1, on a : $\begin{cases} \vec{E}(z>d) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} \\ \vec{E}(z<d) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} \end{cases}$

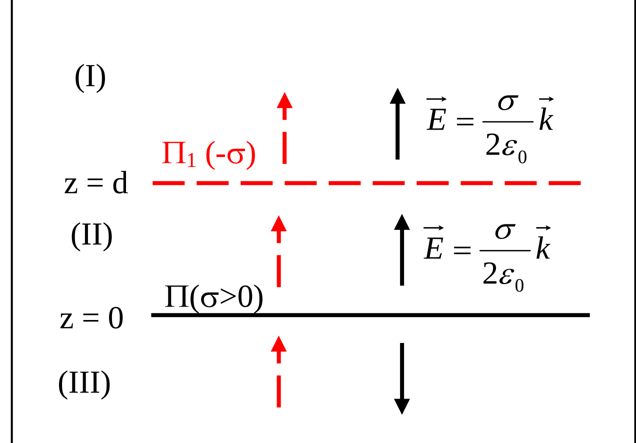
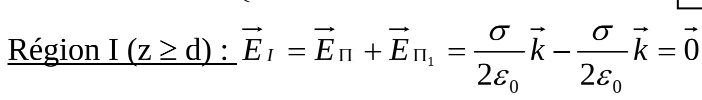


Figure 7



<u>Région I (z ≥ d) :</u> $\vec{E}_I = \vec{E}_\Pi + \vec{E}_{\Pi_1} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} - \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} = \vec{0}$

<u>Région II (0 ≤ z ≤ d) :</u> $\vec{E}_{II} = \vec{E}_\Pi + \vec{E}_{\Pi_1} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} + \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{k}$

<u>Région III (z ≤ 0) :</u> $\vec{E}_{III} = \vec{E}_\Pi + \vec{E}_{\Pi_1} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} + \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} = \vec{0}$

b) Potentiel V(M)

$V = -\int E dz$

<u>Région I (z ≥ d) :</u> $V_I = -\int E_I dz = C_I$

Région II (0 ≤ z ≤ d) : $V_{II} = -\int E_{II} dz = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z + C_{II}$

Région III (z ≤ 0) : $V_{III} = -\int E_{III} dz = C_{III}$

Puisque le potentiel est continu en z = 0 et en z = d, on a :

* Pour z = 0 : $V(z=0) = C_{III} = 0 + C_{II}$ ainsi $C_{II} = C_{III} = 0$

* Pour z = d : $V_{II} = V_I$ ainsi $C_I = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$

Ainsi,

$V_I(z \geq d) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$; $V_{II}(0 \leq z \leq d) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z$ et $V_{III}(z \leq 0) = 0$

3) Représentation de E(z) et V(z)

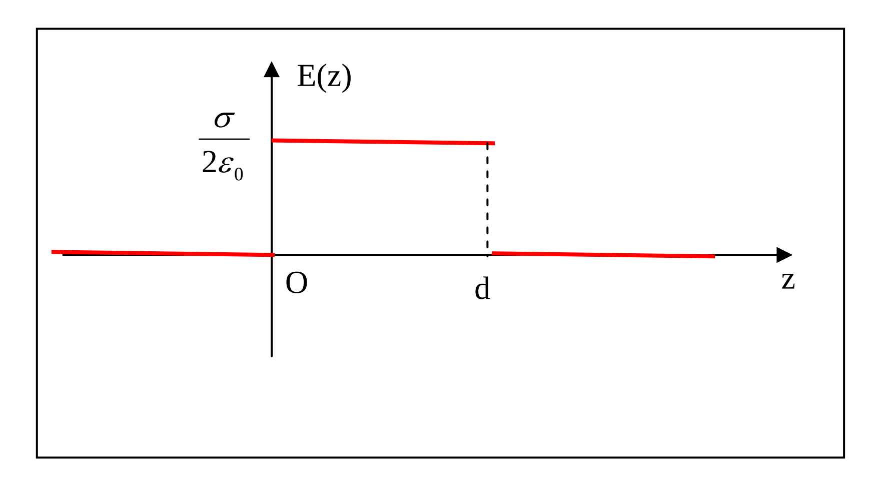


Figure 8

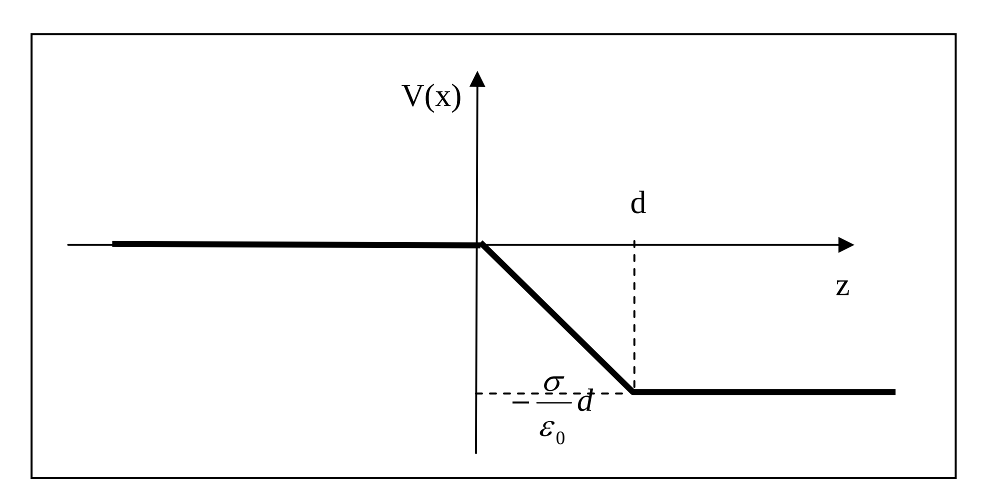


Figure 9

Commentaires : le champ $\left\| \vec{E} \right\|$ est discontinu en z = 0 et en z = d ; alors que le potentiel est continu.

Partie II

Le plan Π crée un champ : $\vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{k}$

Soit D : la surface du disque et S la surface d'une demi-sphère et $D' = D + S$

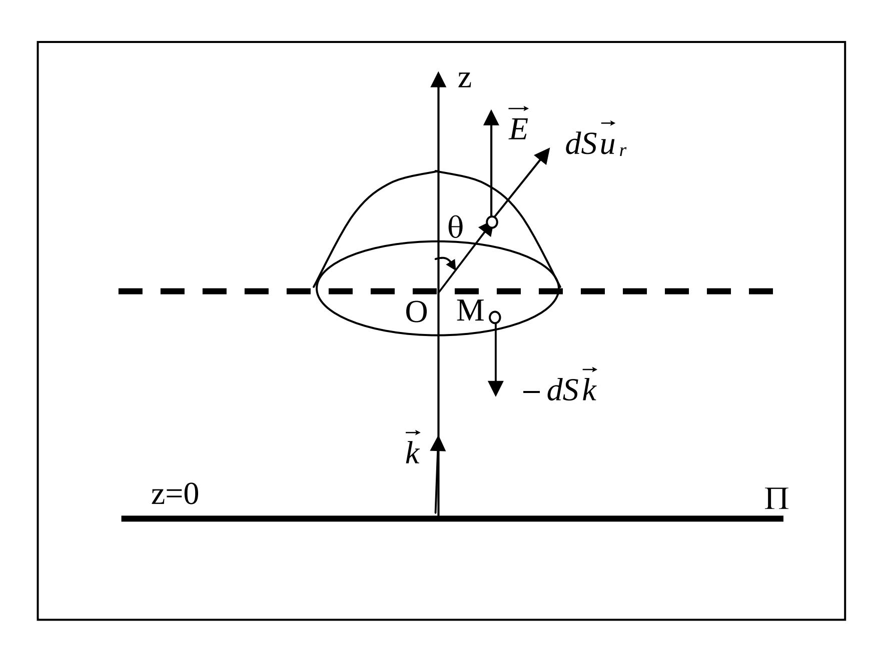


Figure 10

$$\Phi = \oint\!\!\oint_{D'} \vec{E}.d\vec{S} = \iint_D \vec{E}.d\vec{S}_D + \iint_S \vec{E}.d\vec{S}_S = \Phi_D + \Phi_S$$

En un point M du disque D :

$$d\vec{S}_D = -dS\vec{k} = -\rho d\rho d\varphi \vec{k}$$

Le signe – traduit le fait que le flux de $\vec{E}$ à travers D est sortant.

$$\Phi_D = \iint_D \vec{E}.d\vec{S}_D = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\pi R^2$$

* En un point M de la sphère S :

$$d\vec{S}_S = dS\vec{u}_r = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

$$d\Phi_S = \vec{E}.d\vec{S}_S = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi(\vec{k}.\vec{u}_r) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} R^2 \sin\theta \cos\theta d\theta d\varphi$$

$$\Phi_S = \iint_S \vec{E}.d\vec{S}_S = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\pi R^2$$

$$= \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\sin^2}{2}\right]_0^{\pi/2} 2\pi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\pi R^2$$

Ainsi, le flux total est :

$$\Phi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\pi R^2 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\pi R^2 = 0$$

Département : Physique et Chimie	**Examen**	**2**
Année universitaire : 2006-2007	**D.S.**	
Matière : Physique – Section PT 1 -	**Date : 13/03/07**	

N.B. L'étudiant pourra utiliser un résultat donné dans l'épreuve, qu'il n'a pu retrouver, pour la suite.

Problème d'électrostatique

Les parties 1 et 2 sont dépendantes.

Dans tout ce problème l'espace sera rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) et un point quelconque M de l'espace sera repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z).

Partie 1 : Une lame chargée en volume

On considère une lame chargée en volume limitée par les plans d'équations respectives x = -h et x = +h (où e est une constante positive désignant l'épaisseur de la lame) et infinie dans les directions de Oy et de Oz (figure 1).

La lame est chargée uniformément en volume avec une densité ρ positive. Soit $\vec{E}_1(M)$ et V_1(M) le champ et le potentiel électrostatiques créés en M par cette distribution de charges.

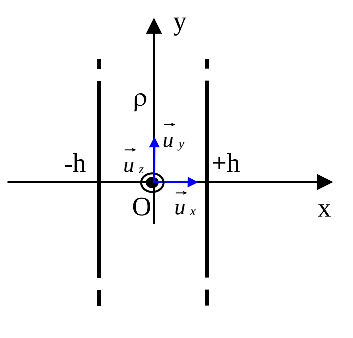


Figure 1

1) De quelles variables d'espace, le potentiel V_1(M) dépend t-il ?
2) Déduire la forme des surfaces équipotentielles et des lignes de champ.
3) Montrer que $\vec{E}_1(M) = E_1(z)\vec{u}_z$ et $E_1(-z) = -E_1(z)$.
4) Calculer le champ $\vec{E}_1(M)$ à l'aide du théorème de Gauss en tout point M de l'espace.
5) Déduire le potentiel V_1(M). On prendra V_1(0, 0, 0) = 0.
6) Tracer les courbes de variations de E_1 et V_1 en fonction de z.
7) On se place dans le cas où l'épaisseur 2h est "très faible". La distribution de charges est alors assimilée au plan (Oxy) chargé surfaciquement avec une densité uniforme σ.
   a) Exprimer la densité surfacique σ en fonction de ρ et h.
   b) Déduire l'expression du champ et du potentiel électrostatiques $\vec{E}_p(M)$ et $V_p(M)$ créés par le plan chargé.
   c) Tracer les courbes de variations de E_p et V_p en fonction de z.
8) Une distribution de charges sur un plan infini ou dans une tranche infinie peut-elle exister dans la réalité?

Partie 2 : Deux lames de charges opposées

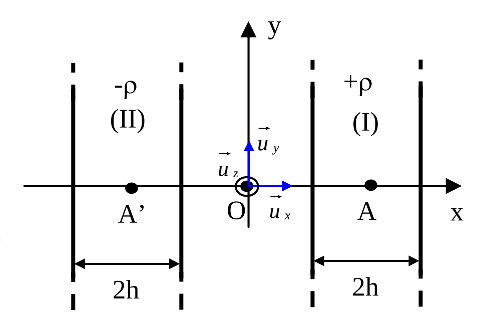


Figure 2

On considère maintenant la distribution de charges représentée sur la figure 2 comprenant deux lames (I et II) infinies dans les directions y et z, d'épaisseur 2h, centrées en A et A', d'abscisses respectives +a et -a ($a > h$), et de charges volumiques uniformes ρ et - ρ. On désigne par $\overrightarrow{E_I}(M)$ le champ électrostatique crée par la lame de centre A et $\overrightarrow{E_{II}}(M)$ celui crée par la lame de centre A'.

1) a) Montrer que le plan x = 0 est un plan de symétrie impair pour les deux lames.

b) En déduire que le champ crée par les deux lames E_2 est une fonction paire de x : $E_2(x) = E_2(-x)$

2) a) Donner les expressions de $\vec{E}_I(M)$ et $\vec{E}_{II}(M)$ dans les trois cas suivants :

cas a) : $x \geq a + h$, cas b) : $a - h \leq x \leq a + h$ et cas c) $0 \leq x \leq a - h$.

b) Déterminer les expressions du champ résultant $\vec{E}_2(M)$ dans les trois cas a), b) et c).

c) Tracer alors l'allure de E_2 en fonction de x.

3) a) Montrer que : $V_2(x) = -V_2(-x)$ où V_2 est le potentiel associé aux deux lames.

b) Donner les expressions de $V_2(M)$ dans les trois cas a), b) et c).

c) tracer l'allure de V_2 en fonction de x.

Correction examen IPEI-EL Manar 2007

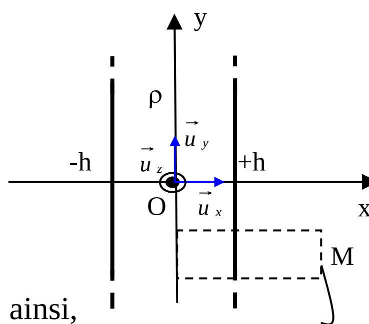


Figure 3

I/

1) $V(M) = V(x, y, z) = V(x)$

2) * Les surfaces équipotentielles vérifient : $V(x) = cste$

Ainsi, $x = cste$ (plans parallèle à yOz)

* Le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles ; ainsi, $\vec{E}$ est porté par $\vec{u}_x$

Les lignes de champ sont des droites parallèles à Ox.

3) * $\vec{E}(M) = \vec{E}(x)$

$\vec{E}$ est tangent aux lignes de champ ; ainsi $\vec{E}(M) = E(x)\vec{u}_x$

* Puisque $\Pi = (O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ psp, $\vec{E}(M) = -\vec{E}(M')$ avec M' est le symétrique de M par rapport à Π. Ce qui implique que : $E(x) = -E(-x)$

Rq : $E(x = 0) = 0$

4) $\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}.\vec{dS} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

Σ : cylindre de génératrices parallèle à Ox et limité par le plan $\Pi = (yOz)$ et le plan passant par M.

$\Phi = E(x) S_B$

* Si M à l'intérieur : $|x| \geq h$

- Pour $x \geq h$; $Q_{\text{int}} = \rho h S_B$

$\vec{E}(x \geq h) = \dfrac{\rho h}{\varepsilon_0} \vec{u}_x$

- Pour $x \leq -h \leq 0$

$\vec{E}(x \leq -h \leq 0) = -\dfrac{\rho h}{\varepsilon_0} \vec{u}_x$

* Si M à l'extérieur : $|x| \leq h$

- Pour $0 \leq x \leq h$; $Q_{\text{int}} = \rho x S_B$

$\vec{E}(x \leq h) = \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0} \vec{u}_x$

- Pour $-h \leq x \leq 0$

$\vec{E}(-h \leq x) = \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0} \vec{u}_x$

Ainsi,

$\vec{E}(|x| \geq h) = \dfrac{\rho h}{\varepsilon_0} \dfrac{x}{|x|} \vec{u}_x$

$\vec{E}(|x| \le h) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}\vec{u}_x$

5) *

$dV(x) = -\vec{E}.d\vec{r} = -E(x)dx$

En échangeant x par –x, on obtient :

$dV(-x) = +E(-x)dx = -E(x)dx = dV(x)$

Ainsi, $V(x) = V(-x)$

Autrement, on observe la même configuration de charge en M et M' où M' est le symétrique de M par rapport à Π. Ce qui implique que : $V(M) = V(M')$

* Pour $x \le h$

$$V(x) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\int x\,dx = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} = V(-x)$$

D'où,

$$V(|x| \le h) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}$$

* Pour $x \ge h \ge 0$ (à l'extérieur)

$$V(x) = -\frac{\rho h}{\varepsilon_0}\int dx = -\frac{\rho h}{\varepsilon_0}x + cste$$

Puisque V est continu en x = h, on a :

$$-\frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0} = -\frac{\rho h^2}{\varepsilon_0} + cste \;;\; cste = \frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0}$$

D'où :

$$V(x) = \frac{\rho h}{\varepsilon_0}(-x + \frac{h}{2})$$

* Pour $x \le -h$ (en échange x en –x)

$$V(x) = \frac{\rho h}{\varepsilon_0}(x + \frac{h}{2})$$

Ainsi : $V(|x| \le h) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}$

6) *

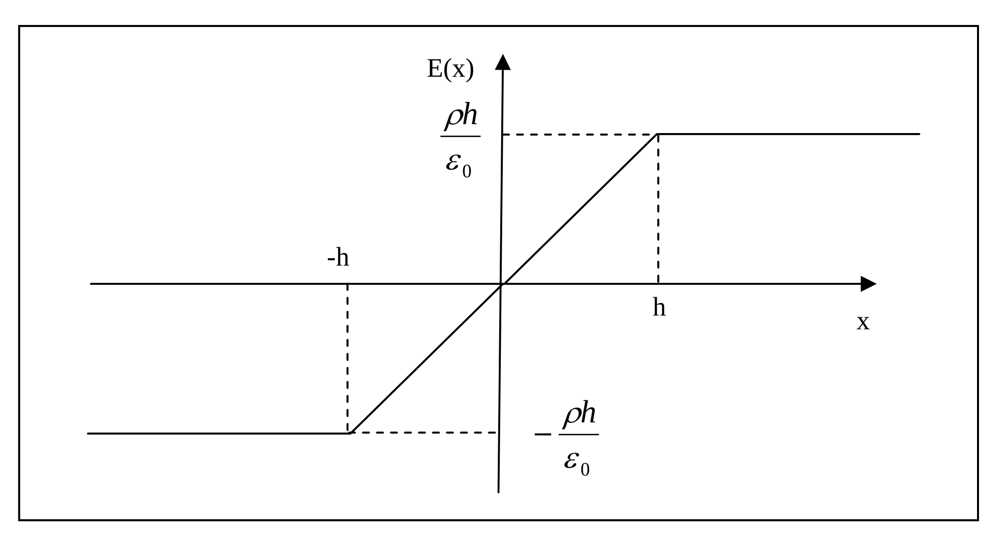


Figure 4

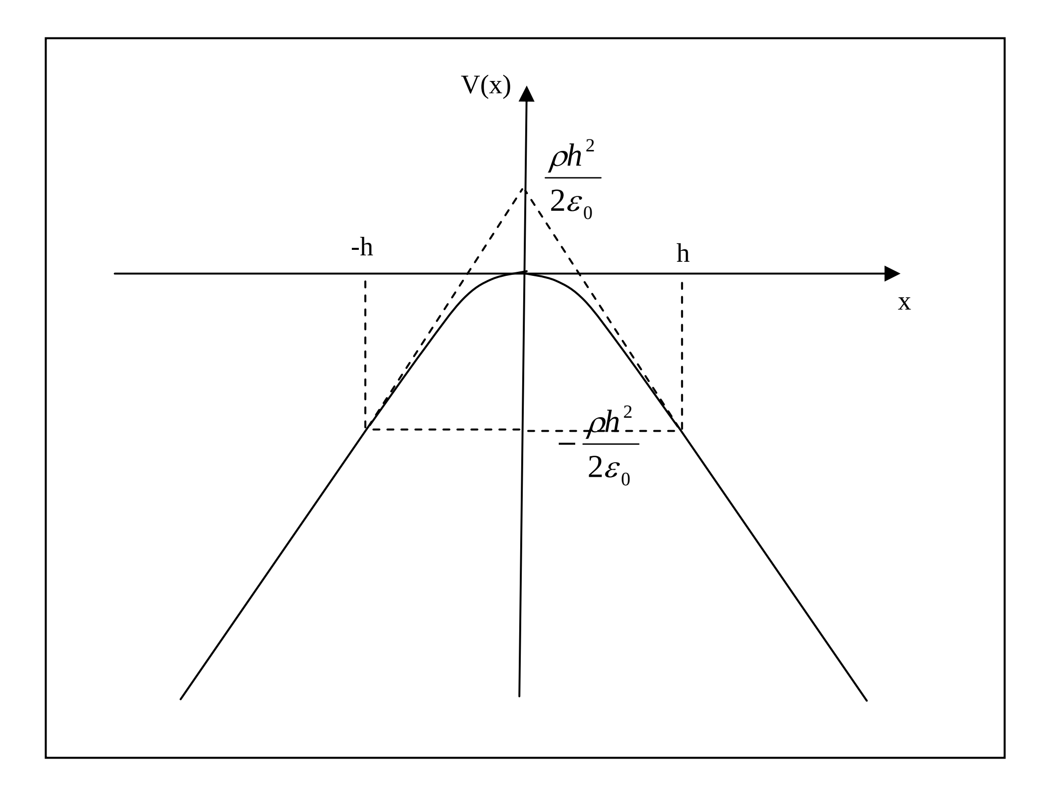


Figure 5

7) Plan chargé en surface avec une densité σ.

a) Q se conserve : $\sigma S = \rho S 2h$

$\sigma = \rho 2h$ et $\rho = \frac{\sigma}{2h}$

b)

$$\vec{E}_p = \vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{|x|}\vec{u}_x$$

$$V_p = V_{ext} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x|$$

c)

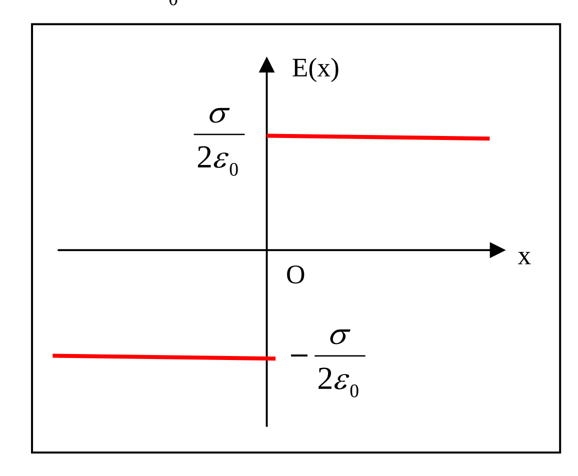


Figure 6

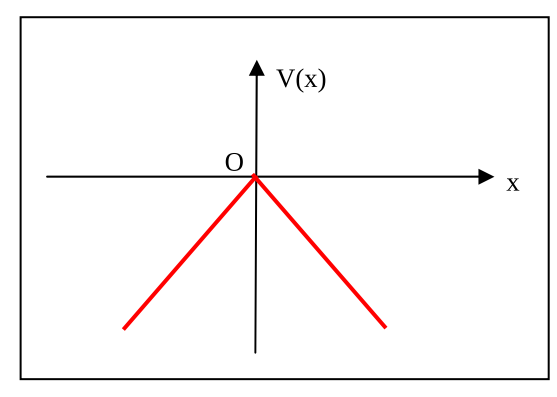


Figure 7

II/

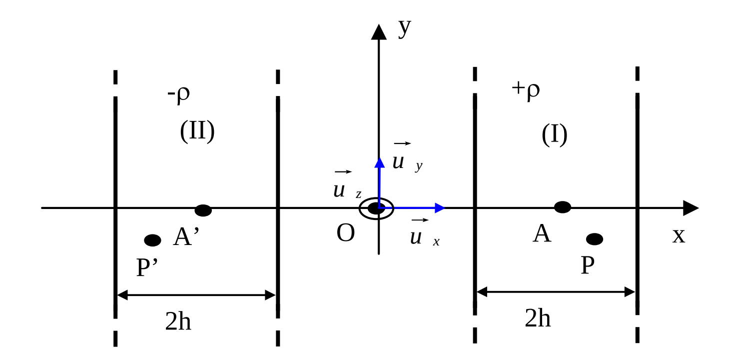


Figure 8

a) Soient P et P' deux points symétriques par rapport au plan (yOz).
$\rho(P) = -\rho(P')$
Ainsi, $\Pi' = (O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ ps **impair**, $\vec{E}_r(M) = \vec{E}_r(M')$ avec M' est le symétrique de M par rapport à Π'. Ce qui implique que : $E(x) = E(-x)$
2) a) et b)

cas	$\vec{E}_I(x) = \vec{E}(x-a)$	$\vec{E}_{II}(x) = -\vec{E}(x+a)$	$\vec{E}_r(x)$
$x \geq a+h$	$\frac{\rho h}{\varepsilon_0}$	$-\frac{\rho h}{\varepsilon_0}$	0
$a-h \leq x \leq a+h$	$\frac{\rho}{\varepsilon_0}(x-a)$	$-\frac{\rho h}{\varepsilon_0}$	$\frac{\rho}{\varepsilon_0}(x-a-h)$
$0 \leq x \leq a-h$	$-\frac{\rho h}{\varepsilon_0}$	$-\frac{\rho h}{\varepsilon_0}$	$-\frac{2\rho h}{\varepsilon_0}$

c)
$E_r(x) = E_r(-x)$

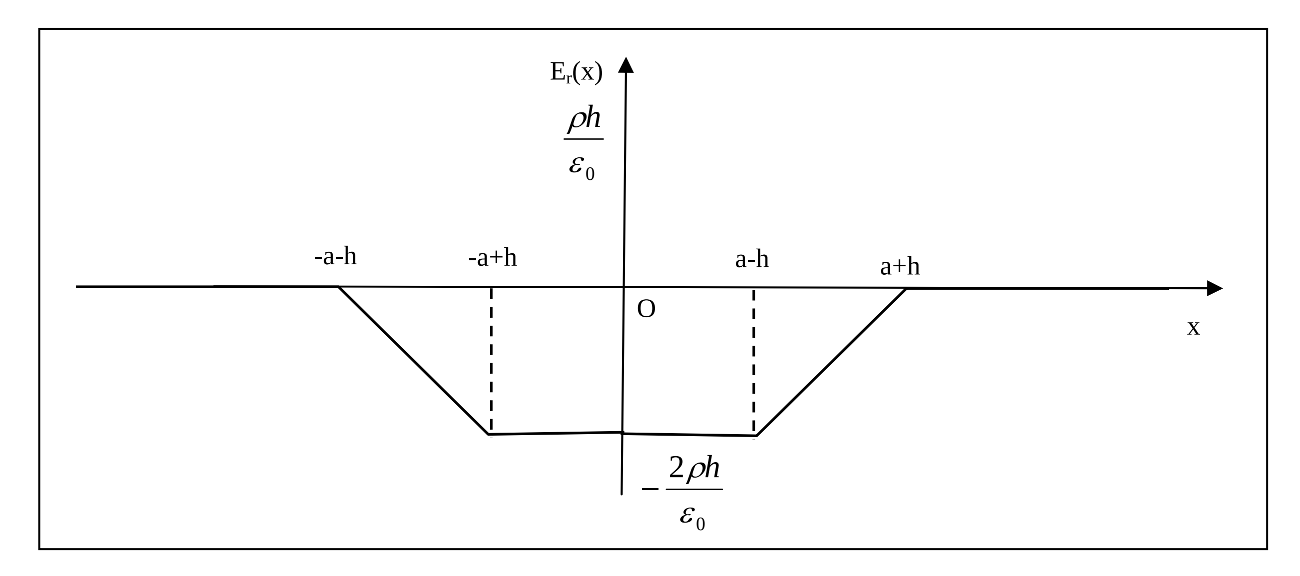


Figure 9

3) $dV_r(x) = -E_r(x)dx = -E_r(-x)dx$ ainsi ; $dV_r(-x) = E_r(x)dx = -dV_r(x)$



المعهد التحضيري للدراسات الهندسية بالمنار

Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs – El Manar

Département : Physique et Chimie	**Examen**	**2**
Année universitaire : 2007-2008	**D.S.**	
Matière : Physique – Section PT 1 -	**Date : 11/03/2008**	

N.B. L'étudiant pourra utiliser un résultat donné dans l'épreuve, qu'il n'a pu retrouver, pour la suite.

L'espace physique est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$). Un point M de l'espace est repéré dans la base cylindrique ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$) par (r, θ, z).

ELECTROSTATIQUE

Problème

A/ On considère un cylindre creux (S) de rayon R, de longueur infinie, chargé en surface par une densité surfacique de charges uniforme $\sigma > 0$ (figure 1). Soit M un point quelconque de l'espace.

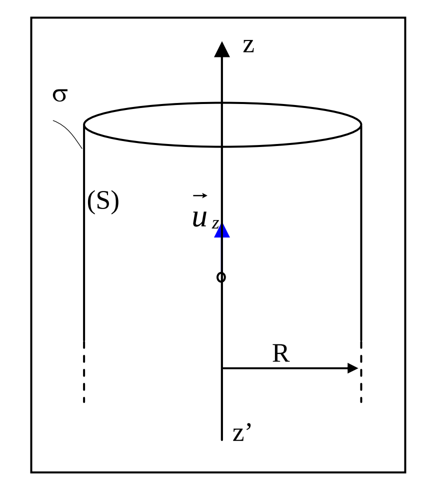


Figure 1

1) Indiquer les coordonnées dont dépend le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et déterminer sa direction.

2) a) Définir et justifier la surface de Gauss.

b) Déterminer le champ $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace ($r < R$ et $r > R$).

3) a) Tracez l'allure de E(r) en fonction de r (où E(r) est la norme du champ).

b) Le champ $\vec{E}(M)$ est-il continu à la traversée de la surface du cylindre.

4) En prenant comme référence du potentiel $V(r = 0) = V_0$, calculez le potentiel V(r) en tout point M de l'espace.

5) a) Tracez l'allure de V(r) en fonction de r.

b) Vérifier que le potentiel V(r) est continu à la traversée du cylindre.

B/ Une couronne cylindrique (C) d'axe $\overrightarrow{z'z}$ et de rayon intérieur R_1 et extérieur R de longueur infinie, porte une charge volumique répartie entre les surfaces des deux cylindres avec une densité constante $\rho > 0$ (figure 2).

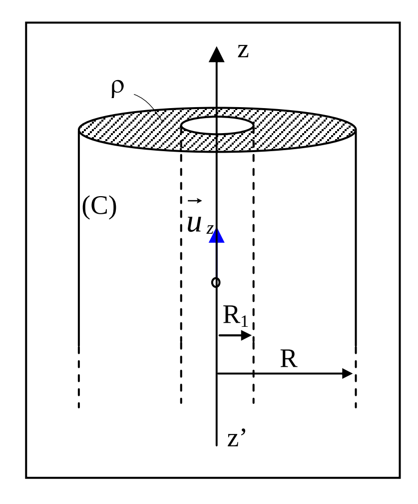


Figure 2

6) Précisez les invariances du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et déterminer sa direction.

7) a) En utilisant le théorème de Gauss, donner les expressions du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace.

b) Le champ $\vec{E}(M)$ est-il continu à la traversée des deux surfaces de la couronne cylindrique (C).

8) On fait tendre $R_1 \to R$, la charge totale de la distribution volumique de la couronne cylindrique est alors répartie sur la surface d'un cylindre creux de longueur infinie et de rayon R. Soit σ la densité de charges du cylindre creux.

a) Exprimer σ en fonction de ρ, R_1 et R.

b) Retrouver les expressions de $\vec{E}(M)$ crée par un cylindre creux.

9) On se place maintenant dans le cas où $R_1 = 0$ et on suppose que le rayon R est négligeable devant la longueur du cylindre chargé. La charge totale de la distribution volumique peut être considérée répartie uniformément sur un fil infini. On désigne par λ la densité linéique du fil.

a) Exprimer λ en fonction de ρ et R.

b) En déduire l'expression du champ $\vec{E}(M)$ crée par le fil.

c) Retrouver $\vec{E}(M)$ crée par un fil de longueur infinie à partir du théorème de Gauss.

d) En déduire l'expression du potentiel V(M) crée par le fil infini à une constante additive près qu'on notera K.

C/ On considère deux fils rectilignes, de longueurs infinies, portant des distributions linéiques de charges de densités constantes $+\lambda$ et $-\lambda$ ($\lambda > 0$). Ces deux fils sont parallèles entre eux et perpendiculaire au plan (Oxy). On désigne par A(-a/2, 0) et B(+a/2, 0) les intersections respectives du fil chargé $(-\lambda)$ et celui chargé à $(+\lambda)$ avec le plan (Oxy). L'origine O du repère (Oxy) est le milieu de AB (AB = a), (figure 3). Soit *M* un point du plan (Oxy) repéré en coordonnées polaires par (r, θ) avec $r = OM$ et $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OM})$.

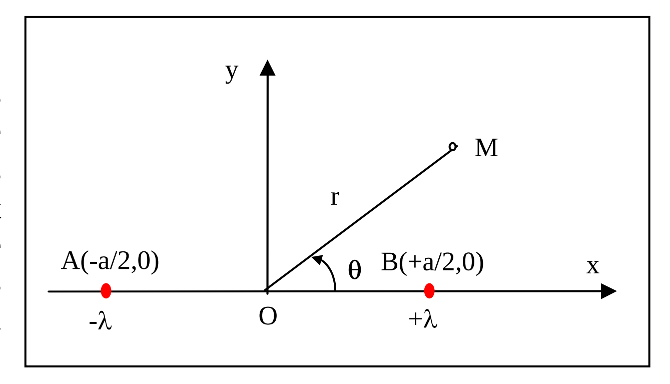


Figure 3

On désigne par V(M) et $\vec{E}(M)$ respectivement le potentiel et le champ électrostatique crées par les deux fils en un point M très éloigné des fils : $r >> a$.

10) En utilisant les résultats de **B-9-d)**, donner les expressions du potentiel $V_{-\lambda}(M)$ crée par le fil en A et du potentiel $V_{+\lambda}(M)$ crée par le fil en B (à constante additive près).

11) Sachant que le point O est pris comme origine du potentiel : $V(O) = 0$, en déduire l'expression du potentiel V(M) crée par les deux fils.

12) Dans le cadre de l'approximation dipolaire (r >> a), exprimer les distances AM et BM en fonction de r, a et θ.

13) a) Montrer que : $V(M) = \dfrac{\lambda\, a \cos\theta}{2\,\pi\,\varepsilon_0\, r}$

b) Montrer que les deux fils chargés se comportent comme un dipôle électrostatique isolé dont on précisera le moment dipolaire $\vec{p}$.

14) En déduire les composantes radiale et orthoradiale du champ électrostatique $\vec{E}(M)$, son module et sa direction.

On donne * $\overrightarrow{grad}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$ où f(r, θ, z) est une fonction scalaire

* Pour x << 1, $\mathrm{Log}(1+x) \cong x$ (au 1er ordre)

Correction examen IPEI-EL Manar 2008

A/ $\sigma > 0$

1) * $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r)$

* $\Pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$

$\Pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

Ainsi, $\vec{E} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$

D'où, le champ est radial :

$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

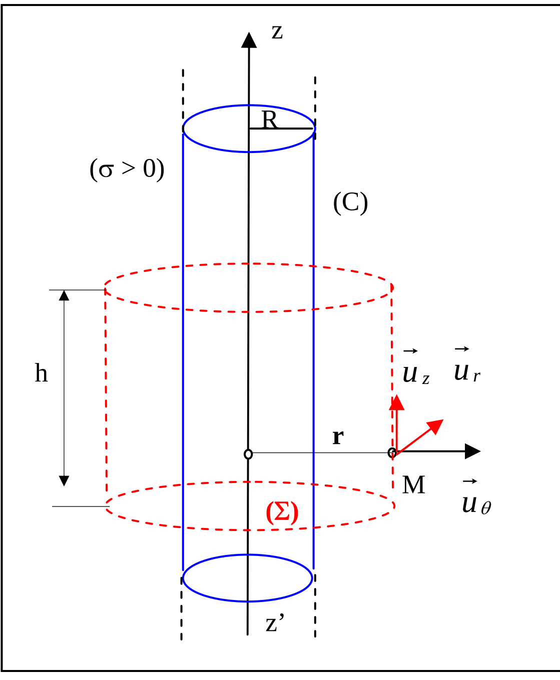


Figure 4

2) a)

* Σ cylindre de hauteur h et d'axe z'z et passant par M.

* (S) présente une symétrie cylindrique et $\vec{E}$ est radial.

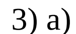
b) $d\Phi = E(r)\vec{u}_r . r d\theta\, dz\, \vec{u}_r = E(r) r\, d\theta\, dz$

d'où,

$\Phi = 2\pi r h E(r)$

* $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$ car $Q_{\text{int}}(r < R) = 0$

* $\vec{E}(r > R) = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$ car $Q_{\text{int}}(r > R) = 2\pi R h \sigma$



3) a)

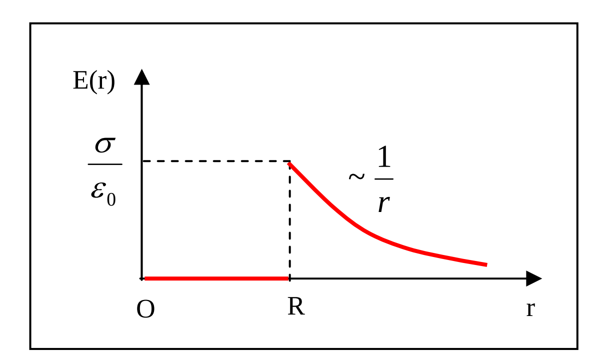


Figure 5

b) E est discontinu en r = R et la valeur de la discontinuité vaut $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

4) $V(r = 0) = V_0$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\dfrac{dV}{dr}\vec{u}_r$ car $\vec{E}$ est radial

$V = -\int E(r) dr$

* $V(r \leq R) = cste = V_0$

$V(r \geq R) = -\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}\int \dfrac{dr}{r} = -\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} Log r + B$

B est déterminé par continuité du potentiel en r = R :

$V_0 = -\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} Log R + B$

Ainsi,

$$B = V_0 + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} LogR$$

$$V(r \geq R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} Log\frac{R}{r} + V_0$$

5) a)

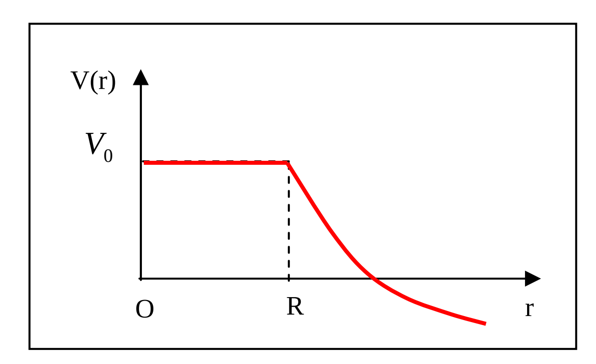


Figure 6

b) $V(r \geq R)_{r=R} = V(r \leq R)_{r=R} = V_0$

B/ ρ > 0

6) $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

$\Phi = 2\pi rhE(r)$

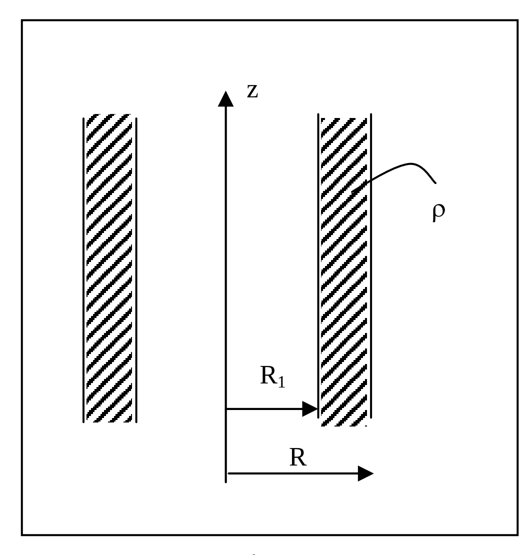


Figure 7

* $\vec{E}(r \leq R_1) = \vec{0}$ car $Q_{\text{int}}(r < R) = 0$

* $R_1 \leq r \leq R$

$$Q_{\text{int}} = \rho\int_0^h dz\int_0^{2\pi} d\theta\int_{R_1}^r rdr = 2\pi h\rho\int_{R_1}^r rdr$$

$$= 2\pi h\rho\left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_1}^r = \pi h\rho\left[r^2 - R_1^2\right]$$

$$\vec{E}(R_1 \leq r \leq R) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}\left[r^2 - R_1^2\right]\vec{u}_r$$

* $r \geq R$

$$Q_{\text{int}} = \pi h\rho\left[R^2 - R_1^2\right]$$

$$\vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}\left[R^2 - R_1^2\right]\vec{u}_r$$

b) * $E(r = R_1^-) = 0$; $E(r = R_1^+) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 R_1}\left[R_1^2 - R_1^2\right] = 0$

ainsi, E est continu en $r = R_1$

* $E(r = R^-) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 R}\left[R^2 - R_1^2\right] = E(r = R^+)$

ainsi, E est continu en $r = R$

8) $R_1 \to R$

a) En considérant un cylindre de hauteur h, la conservation de la charge s'écrit :

$$Q = \rho\left[R^2 - R_1^2\right]\pi h = \sigma 2\pi Rh$$

D'où :

$$\sigma = \frac{\rho}{2R}\left[R^2 - R_1^2\right]$$

b)

$$\vec{E}(r < R) = \vec{0}$$

$$\vec{E}(r > R) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}\left[R^2 - R_1^2\right]\vec{u}_r = \frac{R\sigma}{\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$

On retrouve le résultat de 2-b).

9) $R_1 = 0$ et $R << l$

$$Q = \rho R^2 \pi h = \lambda h$$

$$\lambda = \rho \pi R^2$$

b) $\vec{E}(M) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$

c) $\Phi = 2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$

On retrouve 9 b)

d) $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$ car $\vec{E}$ est radial

$$V = -\int E(r)dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}Logr + K$$

C/ $\overrightarrow{AB} = a\vec{u}_x$

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ avec r >> a (approximation dipolaire)

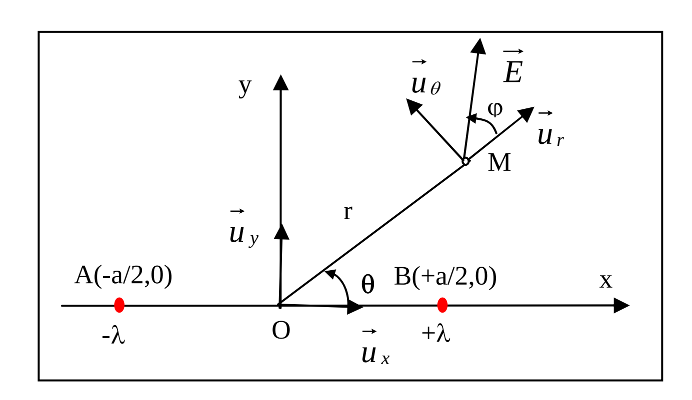


Figure 8

* Le fil passant par B de densité + λ crée le potentiel :

$$V_{+\lambda}(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}Log\left\|\overrightarrow{BM}\right\| + K$$

* Le fil passant par A de densité - λ crée le potentiel :

$$V_{-\lambda}(M) = +\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}Log\left\|\overrightarrow{AM}\right\| + K$$

11) $V(O) = 0$

Le principe de superposition s'écrit :

$$V(M) = V_{-\lambda}(M) + V_{+\lambda}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Log\left[\left\|\overrightarrow{AM}\right\| - \left\|\overrightarrow{BM}\right\|\right] + cste$$

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Log\,\frac{AM}{BM} + cste$$

Or, en M = O, $\frac{AM}{BM} = 1$; $V(O) = cste = 0$

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Log\,\frac{AM}{BM}$$

* $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{AO}^2 + 2\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}^2$

où, $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = r$; $\left\|\overrightarrow{AO}\right\| = \frac{a}{2}$ et $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OM} = \frac{a}{2} r\cos(\theta) = \frac{ar}{2}\cos\theta$

on a :

$$\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = r^2 + ar\cos\theta + \frac{a^2}{4} = r^2(1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2})$$

Puisque $a/r << 1$, on a : $a^2/(4r^2) << a/r$,

$$\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 \cong r^2(1 + \frac{a}{r}\cos\theta)$$

D'où,

$$AM \cong r^2(1 + \frac{a}{r}\cos\theta)^{1/2}$$

* $\left\|\overrightarrow{BM}\right\|^2 = r^2 + ar\cos(\pi - \theta) + \frac{a^2}{4} = r^2(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2})$

$$BM \cong r^2(1 - \frac{a}{r}\cos\theta)^{1/2}$$

13) a) $V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Log\,\frac{(1 + \frac{a}{r}\cos\theta)^{1/2}}{(1 - \frac{a}{r}\cos\theta)^{1/2}}$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left\{Log(1 + \frac{a}{r}\cos\theta) - Log(1 - \frac{a}{r}\cos\theta)\right\}$$

$$\cong \frac{\lambda 2a\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda a\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

b) $\vec{p} = Q_\lambda \overrightarrow{AB} = (\lambda\, l)a\,\vec{u}_x$

$p = (\lambda\, l)a$

14) * $\vec{E}(M) = \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\lambda a\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\lambda a\sin\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$

* $E = (E_r^2 + E_\theta^2)^{1/2} = \frac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$

* $tg\varphi = tg\theta$

Annexe 1

SYSTEMES DES COORDONNEES A AXES ORTHOGONAUX

A1-1 INTRODUCTION

A1-2 COORDONNEES CARTESIENNES

A1-3 COORDONNEFS CYLINDRIQUES

A1-4 COORDONNEES SPHERIQUES

A1-5 APPLICATIONS

A1-6 CONCLUSION

A1-1 INTRODUCTION

Suivant les bases de projection utilisées, plusieurs systèmes des coordonnées peuvent être utiliser pour repérer la position d'un point matériel M (cartésien, cylindrique et sphérique). Les vecteurs de bases de ces systèmes sont tous **unitaires** et **orthogonaux** deux à deux. Dans ce chapitre nous allons définir ces quatre types de systèmes des coordonnées à axes orthogonaux ainsi que les déplacements, surfaces et volumes élémentaires associés. Des exemples de calculs d'intégrale permettront alors de montrer l'importance de ces éléments différentiels.

A1-2 COORDONNEES CARTESIENNES

A1-2.1 Définition

Soit (Oxyz) un système d'axes rectanglaire auquel on associe une base orthonormée direct ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$),(Figure A1-1).

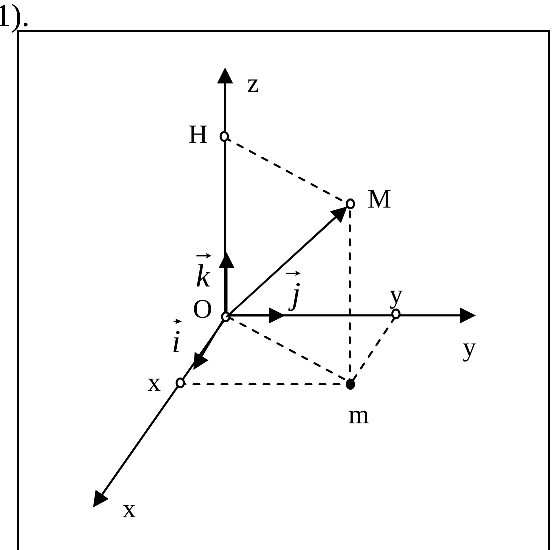


Figure A1-1

Soit M un point matériel. La projection orthogonale de M dans le plan (Oxy) est notée : $m = proj_{Oxy}(M)$ et sa projection sur l'axe Oz est notée : $H = proj_{Oz}(M)$

Le point M est alors repéré par trois distances. Le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ s'écrit donc :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OH} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

x, y et z sont obtenus en projetant orthogonalement le vecteur position respectivement sur les trois axes Ox, Oy et Oz. $x = \overrightarrow{OM}.\vec{i}$; $y = \overrightarrow{OM}.\vec{j}$ et $z = \overrightarrow{OM}.\vec{k}$. Les coordonnées cartésiennes d'un point M sont dénommées :

x est **l'abscisse** du point M (-∞ < x < + ∞)
y est **l'ordonnée** du point M (-∞ < x < + ∞)
z est la **cote** de M (-∞ < x < + ∞)

Les vecteurs de base du système des coordonnées cartésiennes ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) sont définis par :

* $\vec{i}$ est un vecteur unitaire orienté vers x positif
* $\vec{j}$ est un vecteur unitaire orienté vers y positif
* $\vec{k}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire (⊥) aux deux autres vecteurs de base et orienté vers z positif (tel que le trièdre ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) soit direct). Autrement, il est défini par : $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$

A1-2.2 Vecteur déplacement élémentaire

Considérons un point M(x,y,z) et le point M'(x+dx, y+dy, z+dz) obtenu en faisant déplacer les trois composantes de M respectivement de dx, dy et dz **parallèlement** aux vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ (Figure A1-2).

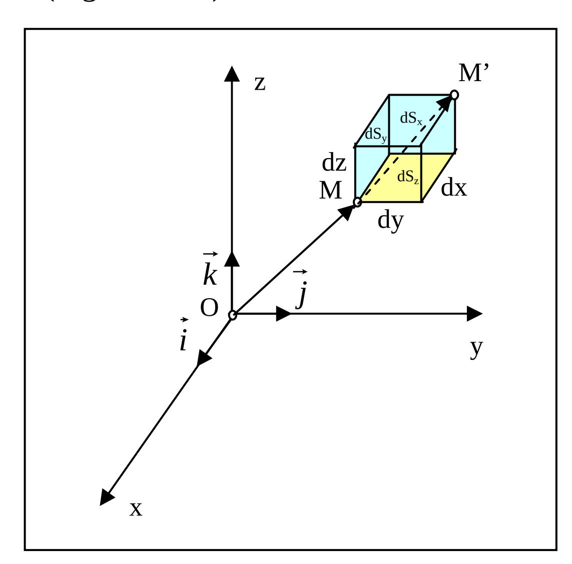


Figure A1-2

Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\vec{r} = d(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$$

$$= d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$= dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

Ainsi, le déplacement élémentaire du point M à M.' est équivalent à trois déplacements élémentaires parallèlement aux vecteurs de base ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) respectivement égaux à dx, dy et dz.

Les projections du vecteur déplacement élémentaire sur la base ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) s'obtiennent en faisant varier de façon infinitésimale une des coordonnées en laissant les deux autres constantes

- La variation de x à y et z constants : $d\vec{r}_x = dx\vec{i}$
- La variation de y à x et z constants : $d\vec{r}_y = dy\vec{j}$
- La variation de z à x et y constants : $d\vec{r}_z = dz\vec{k}$

La norme du vecteur déplacement est donnée par (Figue A1-2):

$$\|d\vec{r}\| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Le déplacement de M à M' engendre un volume élémentaire limité par six surface parallèles deux à deux dont $d\vec{r}$ est une diagonale principale.

A1-2.3 Surfaces élémentaires

Les surfaces élémentaires sont les surfaces décrites par le point M(x,y,z) lorsque l'on fait varier deux de ses coordonnées d'une quantité élémentaire en maintenant la troisième constante.

Ainsi, la surface rectangulaire élémentaire (ou élément de surface) perpendiculaire à Ox est la surface à x constante et pour y varie de dy et z de dz :

$$dS_x = \|d\vec{r}_y \wedge d\vec{r}_z\| = \|dy\vec{j} \wedge dz\vec{k}\| = dydz$$

De même si y puis z sont maintenus constantes, nous avons :

$dS_y = \left\| d\vec{r}_x \wedge d\vec{r}_z \right\| = \left\| dx\vec{i} \wedge dz\vec{k} \right\| = dxdz$

avec, dS_y est la surface perpendiculaire à y

$dS_z = \left\| d\vec{r}_x \wedge d\vec{r}_y \right\| = \left\| dx\vec{i} \wedge dy\vec{j} \right\| = dxdy$

avec, dS_z est la surface perpendiculaire à z

Remarque

Les vecteurs éléments de surfaces sont orientés vers la normale extérieure à l'élément de surface considéré.

A1-2.4 Volume élémentaire

L'élément de volume est le volume décrit par les trois déplacements élémentaires lorsque l'on fait varier les trois coordonnées du point M d'une quantité élémentaire. Ce volume élémentaire est donné par le produit mixte suivant :

$d\tau = dx\vec{i}.(dy\vec{j} \wedge dz\vec{k}) = dx\vec{i}.(dydz\vec{i}) = dxdydz$

A1-3 COORDONNEES CYLINDRIQUES

A1-3.1 Coordonnées polaires

A1-3.1.1 Définition

Soit (Oxy) un système d'axes cartésien plan (Figure A1-3).

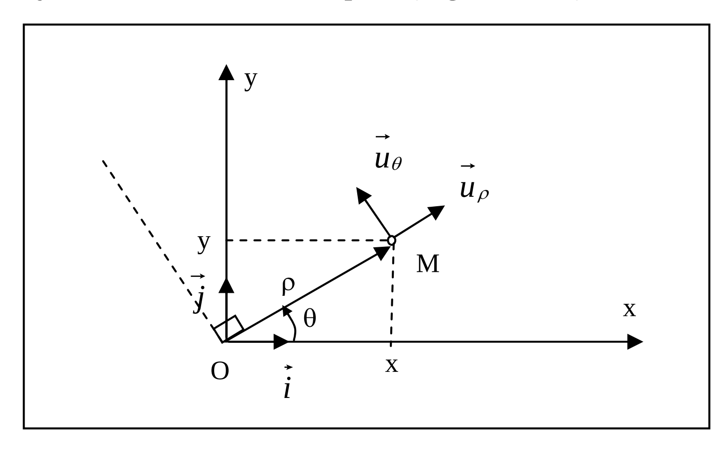


Figure A1-3

Dans le plan (Oxy), un point M est repéré en coordonnées cartésiennes par son abscisse x et son ordonnée y (deux distances). En coordonnées polaires, M est repéré en par une distance et un angle définis par :

ρ : distance du point M à l'origine O, $0 \leq \rho < +\infty$

$\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$

θ : l'angle du dièdre direct (sens positif) appelé angle polaire $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Les vecteurs de base du système polaire sont $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$:

* $\vec{u}_\rho$: vecteur unitaire porté par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$

* $\vec{u}_\theta$: vecteur unitaire dirigé suivant θ croissants

A1-3.1.2 Relations entre les coordonnées cartésiennes et polaires

En coordonnées cartésiennes, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

En projetant le vecteur position (Figure A1-3), nous avons :

$$x=\rho\cos\theta \; ; \; y=\rho\sin\theta$$

A partir de ces deux relations, nous obtenons :

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

En projetant les vecteurs ($\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta$) dans le système de coordonnées cartésiennes, nous obtenons (figure A1-4) :

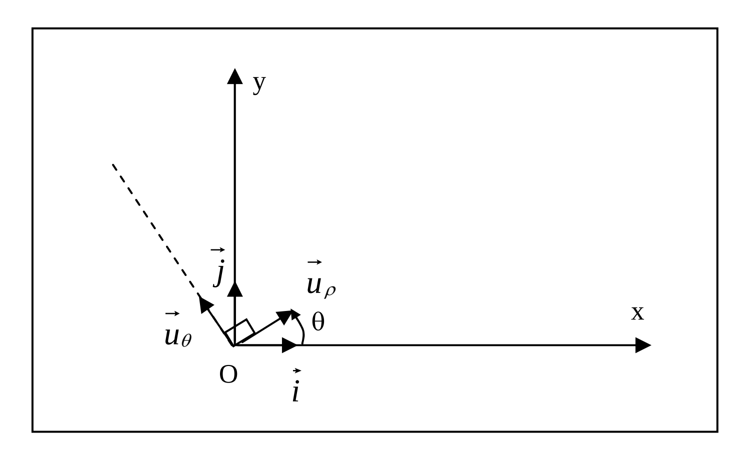


Figure A1-4

$$\vec{u}_\rho=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}$$

A1-3.1.3 Expressions du vecteur position

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}=\rho(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j})=\rho\vec{u}_\rho$$

A1-3.1.4 Dérivation angulaires des vecteurs de base

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}=\cos(\theta+\pi/2)\vec{i}+\sin(\theta+\pi/2)\vec{j}$$

$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}$ se déduit de $\vec{u}_\rho$ en faisant tourner $\vec{u}_\rho$ de π/2 dans le sens trigonométrique (sens positif ou le sens des θ croissants).

Ce résultat est général: la dérivée par rapport à l'angle polaire θ(t) d'un vecteur unitaire, dont l'orientation varie au cours du temps, est un autre vecteur unitaire tourné par rapport au premier, d'un angle π/2 dans le sens positif.

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}=\vec{u}_\theta$$

de même,

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}=-\vec{u}_\rho$$

A1-3.1.5 Déplacement élémentaire

Considérons un point M(ρ, θ) et le point M'(ρ + dρ, θ + dθ) obtenu en faisant déplacer les deux composantes de M respectivement de dρ et dθ parallèlement aux vecteurs de base polaires $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ (Figure A1-5).

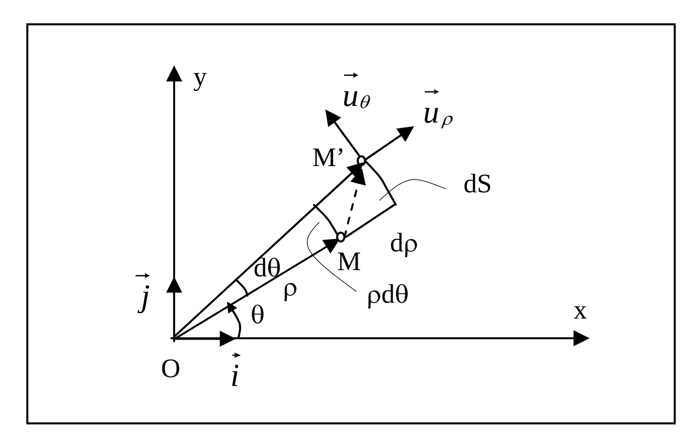


Figure A1-5

Puisque les vecteurs de base polaires changent de direction d'un point à un autre, le vecteur déplacement élémentaire s'écrit en coordonnées polaires :

$$d\vec{r} = d(\rho\vec{u}_\rho) = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\vec{u}_\rho$$

Or,

$$d\vec{u}_\rho(\theta) = (\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta})d\theta = d\theta\vec{u}_\theta$$

$$d\vec{r} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta d\vec{u}_\theta$$

Les projections du vecteur déplacement élémentaire sur la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ s'obtiennent en faisant varier de façon infinitésimale l'une des coordonnées en laissant l'autre constante :

* La variation de ρ à θ constant : $d\vec{r}_\rho = d\rho\vec{u}_\rho$

* La variation de θ à ρ constant : $d\vec{r}_\theta = \rho d\theta d\vec{u}_\theta$

Cette relation peut être également déterminer géométriquement suivant la Figure A1-5 en négligeant les déplacements de second ordre.

La norme du vecteur déplacement élémentaire est la longueur de la première diagonale de la surface élémentaire :

$$\left\|d\vec{r}\right\| = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2}$$

A1-3.1.6 Surface élémentaire

La surface élémentaire décrit par les deux déplacement parallèlement aux vecteurs de base polaires est donnée par :

$$dS = \left\|d\vec{r}_\rho \wedge d\vec{r}_\theta\right\| = \left\|d\rho\vec{u}_\rho \wedge \rho d\theta\vec{u}_\theta\right\| = \rho d\rho d\theta$$

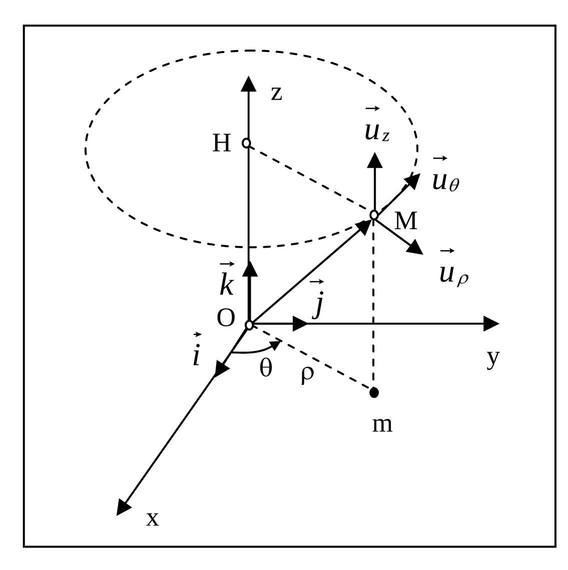


Figure A1-6

A1-3.2 Coordonnées cylindriques

A1-3.2.1 Définition

Dans le système des coordonnées cylindriques, un point M est repéré par deux distances et un angle M(ρ, θ, z).

Le vecteur position s'écrit :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OH}$

avec, $m = proj_{Oxy}(M)$ et $H = proj_{Oz}(M)$

Puisque le plan Oxy est muni d'un système de coordonnées polaires, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$$

avec, ρ et θ ont la même signification que celles en coordonnées polaires. z la même signification en coordonnées cartésiennes.

* $\rho = \|\overrightarrow{Om}\|$; $0 \leq \rho < +\infty$

* $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om})$: anglepolaire; $0 \leq \theta \leq 2\pi$

* z : cote

Les vecteurs de base du système cylindriques ($\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$) sont définis par :

* $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$ sont les vecteurs de base d'un système des coordonnées polaires associé au point m ($\vec{u}_\rho$ vecteur unitaire porté par le vecteur $\overrightarrow{Om}$; $\vec{u}_\theta$ vecteur unitaire dirigé suivant θ croissants)

* $\vec{u}_z$ la même signification que le vecteur porté par Oz en coordonnées cartésiennes : $\vec{u}_z = \vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\theta$.

Le système des coordonnées cylindriques est obtenus par une rotation d'un angle θ des vecteurs de base cartésiennes autour de l'axe Oz.

Les vecteurs $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ changent de direction d'un point à un autre, alors que $\vec{u}_z$ est un vecteur constant.

A1-3.2.2 Relations entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

avec,

$x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\sin\theta$; z = z

A partir de ces deux relations (ou géométriquement), nous obtenons :

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

En **projetant** les vecteurs ($\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$) dans le système de coordonnées cartésiennes, nous obtenons (Figures A1-3 et A1-4) :

$\vec{u}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$; $\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$; $\vec{u}_z = \vec{k}$.

A1-3.1.3 Expressions du vecteur position

A1-3.2.4 Déplacement élémentaire

Considérons un point M(ρ, θ, z) et le point M'(ρ + dρ, θ + dθ, z + dz) obtenu en faisant déplacer les trois composantes de M respectivement de dρ, dθ et dz parallèlement aux vecteurs de base $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$ (Figure A1-6).

Puisque le vecteur $\vec{u}_z$ ne change pas de direction d'un point à un autre $d\vec{u}_z=\vec{0}$ et le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\vec{r}=d(\rho\vec{u}_\rho+z\vec{u}_z)=d\rho\vec{u}_\rho+\rho d\vec{u}_\rho+dz\vec{u}_z$$

Or, $d\vec{u}_\rho=d\theta\vec{u}_\theta$

$$d\vec{r}=d\rho\vec{u}_\rho+\rho d\theta\vec{u}_\theta+dz\vec{u}_z$$

Ce vecteur déplacement élémentaire peut être déterminé géométriquement suivant la figure A1-6.

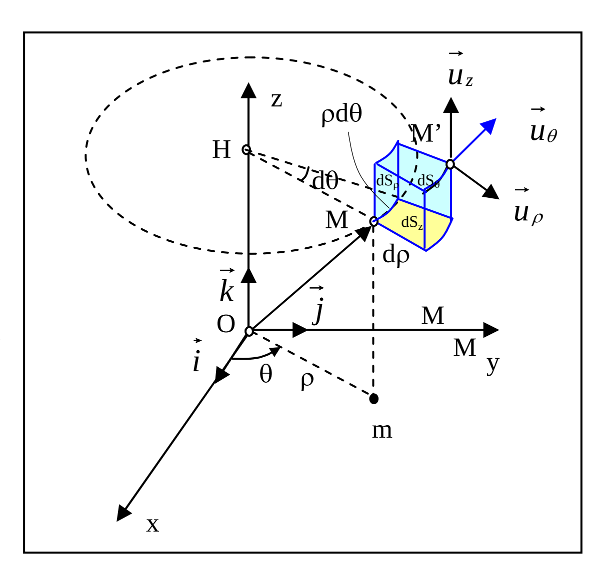


Figure A1-6

A1-3.2.5 Surfaces élémentaires

La surface élémentaire S_ρ à ρconstant est :

$$dS_\rho=\left\|d\vec{r}_\theta\wedge d\vec{r}_z\right\|=\left\|\rho d\theta\vec{u}_\theta\wedge dz\vec{u}_z\right\|=\rho d\theta dz$$

La surface élémentaire S_θ à θ constant est :

$$dS_\theta=\left\|d\vec{r}_\rho\wedge d\vec{r}_z\right\|=\left\|d\rho\vec{u}_\rho\wedge dz\vec{u}_z\right\|=d\rho dz$$

La surface élémentaire S_z à z constant est :

$$dS_z=\left\|d\vec{r}_\rho\wedge d\vec{r}_\theta\right\|=\rho d\rho d\theta$$

A1-3.2.6 Volume élémentaire

$$d\tau=d\rho\vec{u}_\rho.(\rho d\theta\vec{u}_\theta\wedge dz\vec{u}_z)$$
$$=\rho d\rho\vec{u}_\rho.(d\theta dz\vec{u}_\rho)$$
$$=\rho d\rho d\theta dz$$

A1-4 COORDONNEES SPHERIQUES

A1-4.1 Définition

Dans ce système un point M(r, θ, φ) est repéré par deux angles et une distance définis par (Figure A1-7) :

* $r=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ distance de O à M ; 0 ≤ r < +∞

* $\theta=(\overrightarrow{Oz},\overrightarrow{OM})$: colatitude de M ; 0 ≤ θ≤ π

* $\varphi=(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Om})$, avec $m=proj_{Oxy}(M)$.

φ : longitude ou azimuth de M ; comme en coordonnées cylindriques 0 ≤ φ ≤ 2π

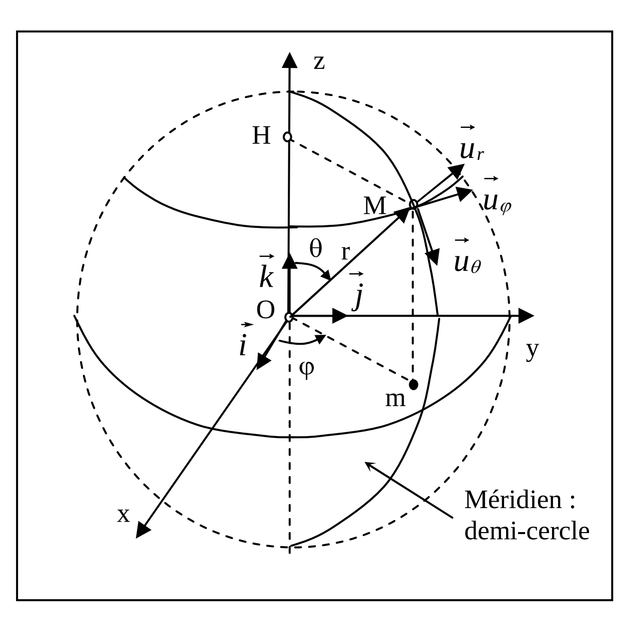


Figure A1-7

Les vecteurs de base du système sphérique $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ sont définis par :

* $\vec{u}_r$: vecteur unitaire porté par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$,

* $\vec{u}_\theta$: vecteur unitaire tangent au méridien et contenu dans le demi-plan méridien (Ozm) et il est dirigé suivant θ croissants.

* $\vec{u}_\varphi$: est un vecteur ⊥ Om (plan méridien) dirigé dans le sens de φ croissant. Ce vecteur est perpendiculaire aux deux autres vecteurs de base et tel que le trièdre $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ est direct : $\vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$.

Le système des coordonnées sphériques est obtenus par une double rotation des vecteurs de base cartésiennes $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La première rotation d'un angle φ autour de $\vec{k}$; la deuxième d'un angle θ autour de $\vec{u}_\varphi$.

Les trois vecteurs $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ changent de direction d'un point à un autre.

A1-4.2 Relations entre les coordonnées cartésiennes et sphériques

Considérons le plan Oxy, et projetant le vecteur $\overrightarrow{Om}$ suivant les vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (Figure A1-8) :

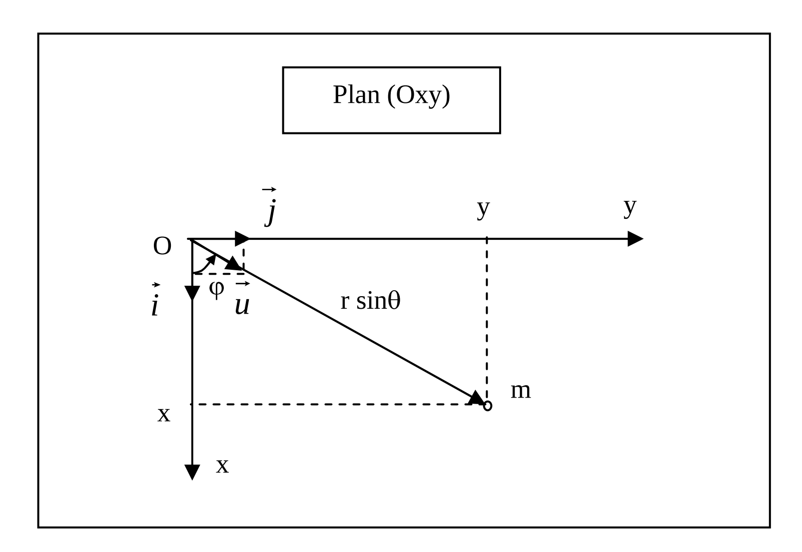


Figure A1-8

En projetant le vecteur $\overrightarrow{Om}$, nous avons :

$x = r\sin\theta\cos\varphi$; $y = r\sin\theta\sin\varphi$

La cote z n'est autre que la projection du vecteur position sur l'axe Oz :

$z = r\cos\theta$

avec, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Pour trouver l'expression des vecteurs de base sphériques en fonction des vecteurs de base cartésiennes, considérons le plan (Ozm), avec $m = proj_{Oxy}(M)$ et soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire porté par la droite Om.

$\vec{u}_r = \overrightarrow{Om'}\vec{u} + \overrightarrow{OC'}\vec{k} = \sin\theta\vec{u} + \cos\theta\vec{k}$

$\vec{u}_\theta = \overrightarrow{Om''}\vec{u} + \overrightarrow{OC''}\vec{k} = \cos\theta\vec{u} - \sin\theta\vec{k}$

Pour exprimer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par $\overrightarrow{Om}$ en fonction des vecteurs de base cartésienne, nous considérons le plan Oxy de la Figure A1-9.

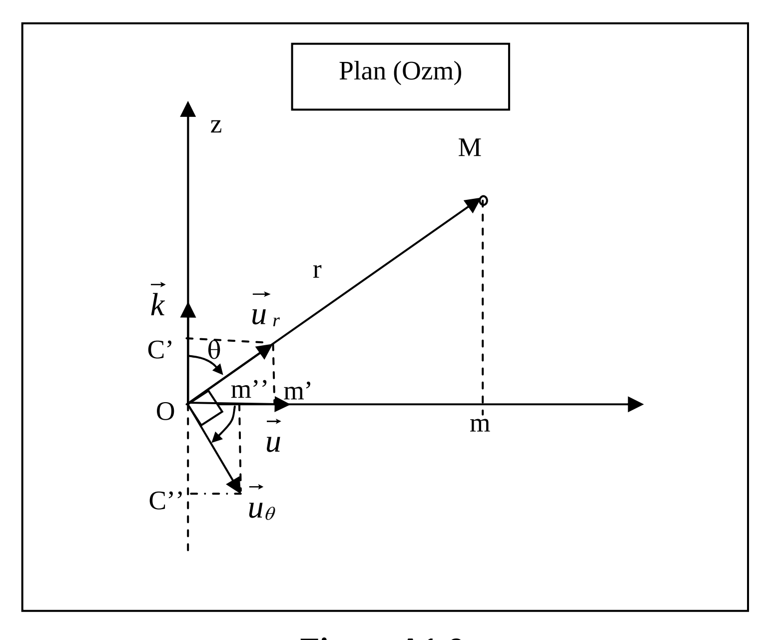


Figure A1-9

$\vec{u}=\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j}$

d'où:

$\vec{u}_r=\sin\theta(\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j})+\cos\theta\vec{k}=\sin\theta\cos\varphi\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\vec{j}+\cos\theta\vec{k}$

$\vec{u}_\theta=\cos\theta(\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j})-\sin\theta\vec{k}=\cos\theta\cos\varphi\vec{i}+\cos\theta\sin\varphi\vec{j}-\sin\theta\vec{k}$

Connaissant $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, le troisième vecteur de base est donné par :

$$\vec{u}_\varphi=\vec{u}_r\wedge\vec{u}_\theta=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\end{vmatrix}=-\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j}$$

A1-4.3 Expressions du vecteur position

Le vecteur déplacement s'écrit :

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=r(\sin\theta\cos\varphi\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\vec{j}+\cos\theta\vec{k})=r\vec{u}_r$$

A1-4.4 Déplacement élémentaire

Considérons un point M(r, θ, φ) et le point M'(r + dr, θ + dθ, φ + dφ) obtenu en faisant déplacer les trois composantes de M respectivement de dr, dθ et dφ parallèlement aux vecteurs de base sphériques $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ (Figure A1-10).

Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\vec{r}=d(r\vec{u}_r)=dr\vec{u}_r+rd\vec{u}_r$$

$$\vec{u}_r=\sin\theta\cos\varphi\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\vec{j}+\cos\theta\vec{k}$$

$$d\vec{u}_r=\frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\varphi}d\varphi$$

$$=(\cos\theta\cos\varphi\vec{i}+\cos\theta\sin\varphi\vec{j}-\sin\theta\vec{k})d\theta+(-\sin\theta\sin\varphi\vec{i}+\sin\theta\cos\varphi\vec{j})d\varphi$$

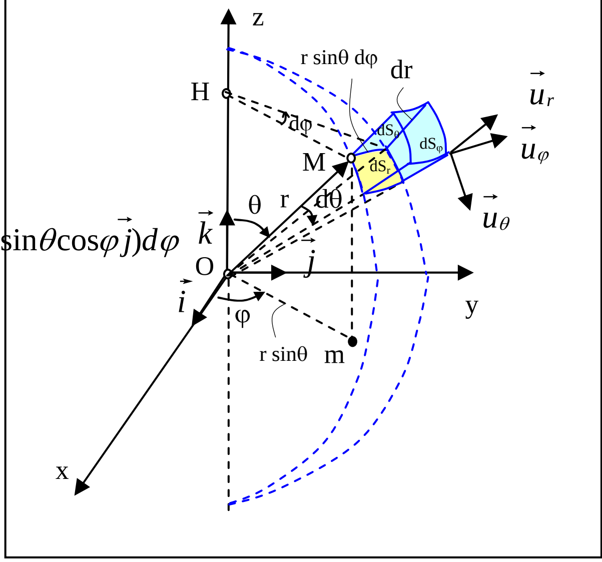


Figure A1-10

d'où,

$$d\vec{u}_r=d\theta\vec{u}_\theta+\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

$$d\vec{r}=dr\vec{u}_r+rd\theta\vec{u}_\theta+r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

Les projections du vecteur déplacement élémentaire sur la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ s'obtiennent comme en coordonnées cylindriques en faisant varier de façon infinitésimale une des coordonnées en laissant les deux autres constantes :

* La variation de r à θ et φ constants : $d\vec{r}_r=dr\vec{u}_r$

* La variation de θ à r et φ constants : $d\vec{r}_\theta=rd\theta\vec{u}_\theta$

* La variation de φ à r et θ constants : $d\vec{r}_\varphi=r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$

A1-4.5 Surface élémentaire

Les vecteurs déplacements élémentaires $d\vec{r}_r$, $d\vec{r}_\theta$ et $d\vec{r}_\varphi$ permettent de considérer les surfaces élémentaires suivantes:

$$dS_r=\left\|d\vec{r}_\theta\wedge d\vec{r}_\varphi\right\|=\left\|rd\theta\vec{u}_\theta\wedge r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi\right\|=r^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$dS_\theta = \left\| d\vec{r}_\varphi \wedge d\vec{r}_r \right\| = \left\| r\sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi \wedge dr\vec{u}_r \right\| = r\sin\theta dr d\varphi$$

$$dS_\varphi = \left\| d\vec{r}_r \wedge d\vec{r}_\theta \right\| = \left\| dr\vec{u}_r \wedge r d\theta \vec{u}_\theta \right\| = r dr d\theta$$

A1-4.6 Volume élémentaire

Les six surfaces élémentaires délimitent un volume élémentaire donné par :

$$d\tau = dr\vec{u}_r.(r d\theta \vec{u}_\theta \wedge r\sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi) = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

A1-5 APLLICATIONS

A1-5.1 Coordonnées cartésiennes

Pour calculer la surface d'un cercle, considérons d'abord la surface élémentaire en coordonnées cartésiennes (Figure A1-11) :

$$dS = dxdy$$

L'équation d'un cercle s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

d'où,

$$x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$$

$$S = \iint dS = \int_{-R}^{+R}\left[\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-y^2}} dx\right]dy$$

$$= 2\int_{-R}^{+R}\sqrt{R^2 - y^2}\,dy$$

$$= 2\int_{-R}^{+R}\sqrt{1-\left(\frac{y}{R}\right)^2}\,dy$$

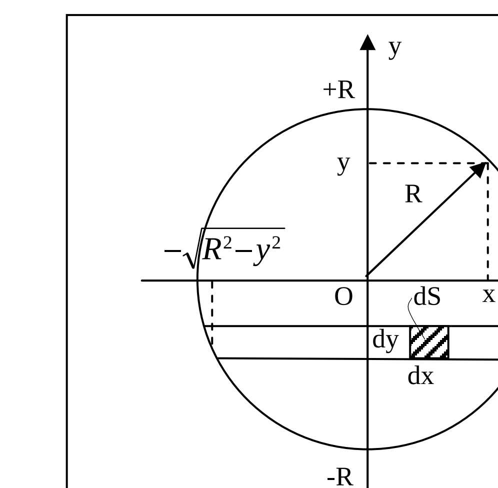


Figure A1-11

Posons :

$$\frac{y}{R} = \cos\theta \; ; \; dy = -R\sin\theta d\theta$$

Pour y = R; θ = 0 et pour y = -R; θ = π ; ainsi :

$$S = -2R^2\int_{\pi}^{0}\sqrt{1-\cos^2\theta}\,\sin\theta d\theta$$

$$S = -2R^2\int_{\pi}^{0}\sin^2\theta d\theta = -2R^2\int_{\pi}^{0}\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)d\theta = -2R^2\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\pi}^{0} = \pi R^2$$

A1-5.2 Coordonnées polaires

1) Le calcul de la surface d'un cercle est repris à partir des coordonnées polaires. Pour celà nous considérons la surface élémentaire représentée sur la Figure A1-12 :

$$dS = \rho d\rho d\theta$$

avec , $0 \leq \rho \leq R$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$S = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^2$$

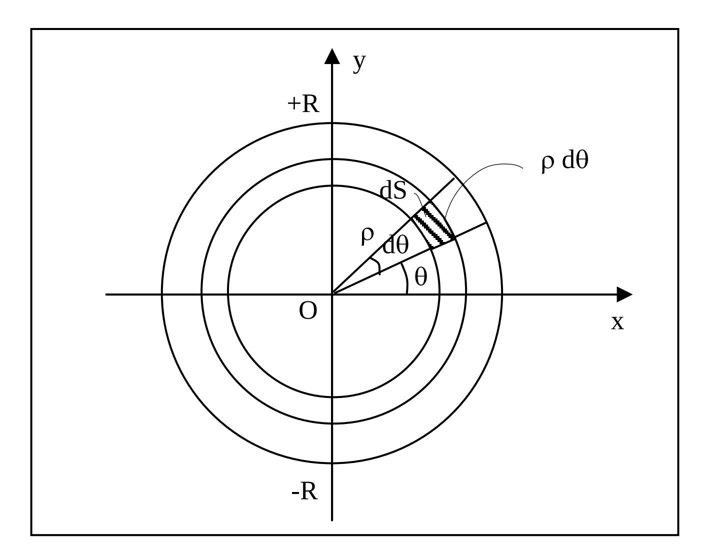


Figure A1-12

2) Surface latérale d'un cylindre de hauteur h (ρ = R = cste)

$$dS = \rho d\theta dz = R d\theta dz$$

$$S = R\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = 2\pi R h$$

A1-5.2 Coordonnées cylindrique

Pour calculer le volume d'un cylindre :

$$d\tau = \rho d\rho d\theta dz$$

$$\tau = \iiint d\tau = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^h = \pi R^2 h$$

A1-5.2 Coordonnées sphériques

Pour calculer le volume d'une sphère :

$$d\tau = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$$

$$\tau = \iiint d\tau = \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

A1-6 CONCLUSION

Nous pouvons vérifier que les vecteurs de base qui définissent les différents systèmes des coordonnées sont unitaires, qu'ils sont orthogonaux deux à deux et formes des bases directes. Les vecteurs position, déplacements élémentaires, surfaces élémentaires dépendent du système des coordonnées choisis pour les exprimer.

Les systèmes des coordonnées cylindriques sont utilisés dans les problèmes présentant une symétrie axiale de révolution.

Les systèmes des coordonnées sphériques sont utilisés dans les problèmes présentant une symétrie sphérique autour d'un point O.